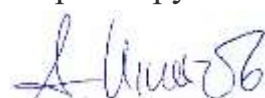


Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

На правах рукописи



Игнатов Александр Иванович

**ДИНАМИКА И УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, ПРЕДНАЗНАЧЕННОГО ДЛЯ
ПРОВЕДЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНЫХ НАУЧНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ**

Специальность: 1.1.7 Теоретическая механика, динамика машин
(технические науки)

диссертация на соискание ученой степени

доктора технических наук

Москва – 2024

Оглавление

Введение	5
Актуальность темы исследования	9
Цель и задачи диссертационной работы.....	10
Структура работы и обзор исследований	12
Используемые методы исследования.....	26
Научная новизна.....	27
Практическая значимость и реализация результатов работы	27
Личный вклад автора	29
Достоверность и апробация работы	29
Публикации.....	31
Положения, выносимые на защиту	33
Объем работы	35
Глава 1. Используемые системы координат, математические модели и уравнения движения.....	36
1.1 Системы координат.....	36
1.2 Модели геомагнитного поля Земли.....	39
1.3 Уравнения движения космического аппарата.....	40
1.4 Начальные условия орбитального движения	45
1.5 Расчет микроускорений.....	46
1.6 Схема проведения спектрального анализа данных	51
Глава 2. Исследование устойчивости установившегося ориентированного движения космического аппарата	53
2.1 Уравнения углового движения космического аппарата	53
2.2 Поиск начальных условий ориентированного движения	54
2.3 Спектральный анализ ориентированных движений.....	57
2.4 Аппроксимация ориентированного движения космического аппарата....	58
2.5 Периодические движения космического аппарата.....	61
2.6 Существование периодических движений	64
2.7 Устойчивость периодических решений.....	68
Основные результаты главы 2	69

Глава 3. Прогнозирование и оценка минимального уровня

микроускорений на борту космического аппарата.....	100
3.1 Уравнения углового движения космического аппарата	100
3.2 Пассивная гравитационная ориентация космического аппарата.....	101
3.3 Орбитальная ориентация космического аппарата	104
Основные результаты главы 3	110

Глава 4. Режим орбитальной ориентации космического аппарата.....

4.1 Управление угловым движением космического аппарата с помощью гиросистемы.....	123
4.1.1 Уравнения углового движения космического аппарата	123
4.1.2 Орбитальная ориентация космического аппарата с использованием гиродемпфирования	124
4.1.3 Управление угловым движением космического аппарата в режиме гиродемпфирования	127
4.1.4 Математическое моделирование режима гиродемпфирования	129
4.1.5 Орбитальная ориентация космического аппарата в окрестности гравитационно устойчивого положения равновесия	132
4.1.6 Орбитальная ориентация космического аппарата в окрестности гравитационно неустойчивого положения равновесия	135
4.1.7 Спектральный анализ микроускорений	138
4.2 Управление угловым движением космического аппарата с помощью электромагнитной системы ориентации.....	150
4.2.1 Уравнения углового движения космического аппарата	151
4.2.2 Режим гравитационной ориентации космического аппарата	151
4.2.3 Управление угловым движением космического аппарата	153
4.2.4 Математическое моделирование режима гравитационной ориентации.....	156
4.2.5 Периодическая аппроксимация ориентированного движения космического аппарата	158
Основные результаты главы 4	161

Глава 5. Режим солнечной ориентации космического аппарата	175
5.1 Управление угловым движением космического аппарата с помощью гиросистемы.....	175
5.1.1 Уравнения углового движения космического аппарата	175
5.1.2 Трехосная солнечная ориентация космического аппарата.....	176
5.1.3 Режим солнечной ориентации космического аппарата с ограничением роста гиросtatического момента	180
5.1.4 Использование режима временной орбитальной ориентации космического аппарата	184
5.2 Управление угловым движением космического аппарата с помощью электромагнитной системы ориентации.....	205
5.2.1 Уравнения углового движения космического аппарата	205
5.2.2 Стабилизация космического аппарата - гиростата.....	206
5.2.3 Управление угловым движением космического аппарата	208
5.2.4 Математическое моделирование режима солнечной ориентации....	209
5.2.5 Периодическая аппроксимация ориентированного движения космического аппарата	215
Основные результаты главы 5	216
Глава 6. Выбор параметров гиросистемы при различных режимах углового движения космического аппарата	224
6.1 Реализация программных разворотов с помощью системы двигателей-маховиков	225
6.2 Поддержание орбитальной ориентации с помощью системы двигателей-маховиков	235
6.3 Поддержание солнечной ориентации с помощью системы двигателей-маховиков	245
6.4 Реализация углового движения с помощью гиродинов. Построение особых поверхностей систем гиродинов	255
Основные результаты главы 6	268
Заключение и выводы.....	275
Библиография	277
Приложение	295

Введение

Проведение научных экспериментов в космосе началось в СССР еще на рубеже 50-х и 60-х годов прошлого века, т.е. фактически в самом начале эры практической космонавтики. Были запущены искусственные спутники Земли (ИСЗ) с научной аппаратурой на борту и получены первые результаты, связанные с медико-биологическими исследованиями, а также с изучением физики космоса [1]. Следующим этапом в освоении космического пространства стало создание в первой половине 1970-х долговременных орбитальных станций (ДОС), которые уже можно было использовать как космические лаборатории при проведении научных экспериментов как в присутствии космонавтов, так и без них. В СССР это были ДОС серии «Салют» (рис. В.1), в США первой космической лабораторией стала станция «Skylab» [2] (рис. В.2).



Рис. В.1. Долговременная орбитальная станция «Салют-7».



Рис. В.2. Станция «Skylab».

Возможность присутствия человека на борту ДОС позволила не только проводить более технически сложные эксперименты в космосе, но и решила проблему возвращения на Землю физических и биологических материалов, использовавшихся в проведенных исследованиях. Логичным продолжением темы ДОС стало создание орбитальной станции «МИР» и в последствии Международной космической станции (МКС), на которых также проводилось и проводится в настоящее время (на МКС) большое количество научных экспериментов.

Развитие космической техники значительно расширило возможности для

многих различных отраслей наук по проведению широкого спектра исследований, в частности, необходимым условием для которых является наличие длительной невесомости. Но уже начиная с первых экспериментов, проведенных на орбите Земли, возникли и специфические проблемы, некоторые из которых не решены до сих пор. Одной из таких проблем является проблема микроускорений [3], при наличии которых абсолютная невесомость на борту космического аппарата (КА) становится практически недостижима. Во многих развитых странах мира были созданы специализированные научные центры, занимающиеся изучением микроускорений, такие как [4]: National Center for Microgravity Research NCMR (США), Microgravity Research Centre MRC (Бельгия), Center of Applied Space Technology and Microgravity ZARM (Германия), Japan Microgravity Center JAMIC (Япония) и др.

Основными факторами, влияющими на уровень микроускорений на борту КА, являются режимы его углового движения и особенности конструкции, а также внешние возмущающие моменты, действующие на корпус КА. С последним фактором можно бороться путем увеличения высоты орбиты КА (>600 км), но тогда это сильно затруднит возвращение на Землю физических и биологических материалов, участвовавших в космических экспериментах.

Относительно приемлемый для проведения различных экспериментов уровень микроускорений ($\sim 10^{-5}$ м/с²) был достигнут на специализированных научных КА серий «Бион / Бион-М» (первый запуск в 1973 году) и «Фотон / Фотон-М» (первый запуск в 1985 году). Высота орбиты этих КА не превышала 600 км, такое ограничение, по всей видимости, было связано с наличием возвращаемой на Землю капсулы, в которой находятся результаты проведенных экспериментов. На большинстве КА обеих серий (кроме самых последних модификаций) отсутствовали выносные панели солнечных батарей, что уменьшало влияние упругих колебаний конструкции на микроускорения возникающие на борту. В качестве основного недостатка указанных КА можно выделить ограниченный срок их активного существования на орбите (не более 30 суток в режиме пассивной гравитационной ориентации, кроме последнего КА

«Фотон-М4»), что было вызвано ресурсом работы аккумуляторной батареи. В общей сложности состоялось 28 пусков (27 успешных) КА обеих серий, последний пуск был проведен в 2014 году. Однако, в настоящее время использование этих КА остается под вопросом.

На МКС проведение экспериментов в области микроускорений в настоящее время затруднено из-за особенностей ее конструкции. Дело в том, что станция состоит из соединенных между собой модулей, на ее корпусе закреплено большое количество панелей солнечных батарей и все эти факторы вызывают упругие колебания конструкции, негативно влияющие на уровень микроускорений на борту. Кроме того, центра масс станции расположен вне ее российского сегмента, что также ухудшает условия проведения экспериментов в области микроускорений.

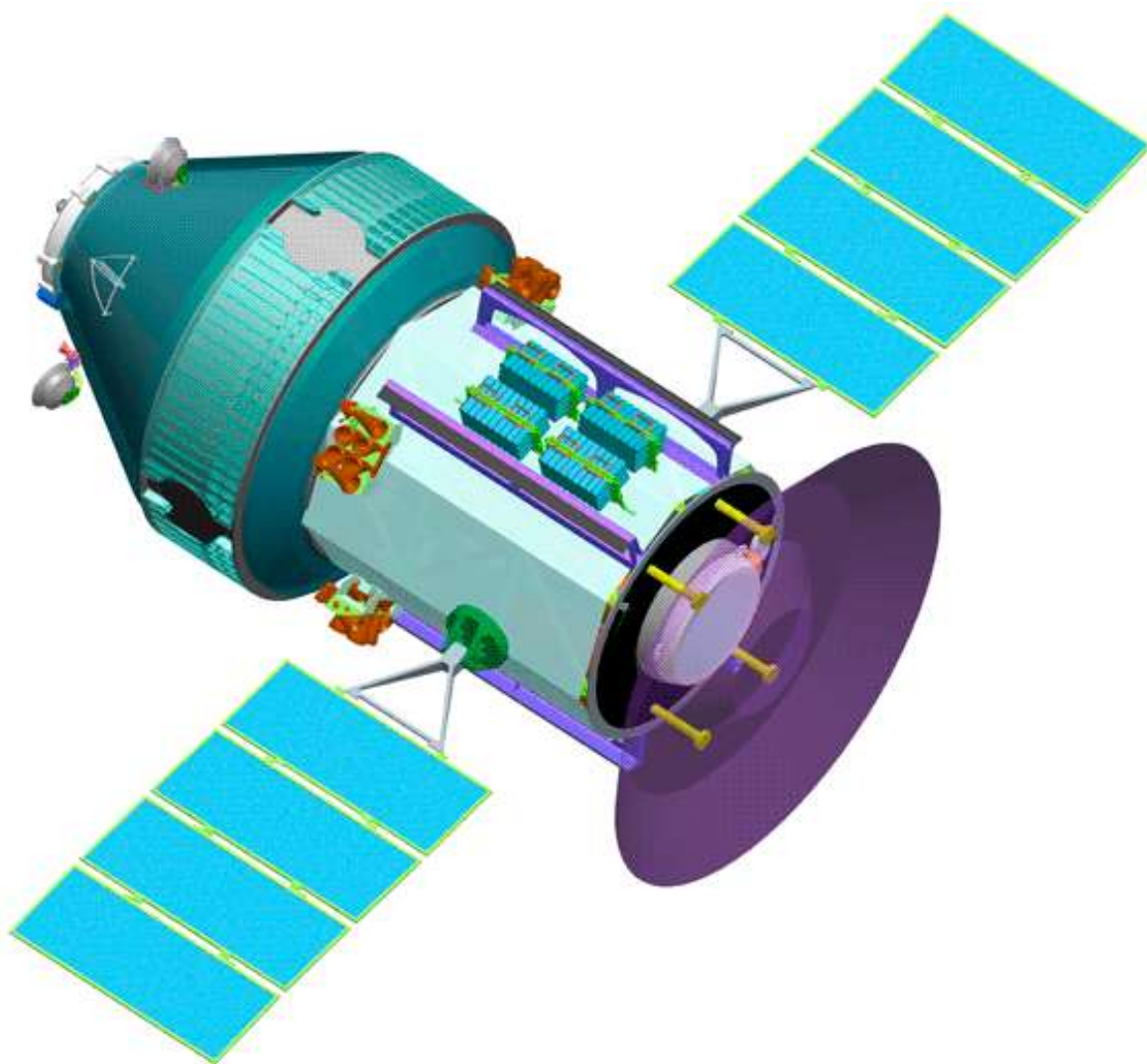


Рис. В.3. Космический аппарат «ОКА-Т» (проект).

В связи с вышеизложенным представляется весьма актуальной идея создания КА нового поколения, предназначенного для проведения длительных космических экспериментов. В качестве примера можно привести проект космического аппарата «ОКА-Т» (рис. В.3) до недавнего времени разрабатываемого в ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королева».

Актуальность темы исследования

Возможность реализации научных экспериментов в космосе, связанных с уникальными условиями их проведения (космический вакуум, микрогравитация, наличие космического и солнечного излучения и т.п.) дает мощный импульс к дальнейшему развитию различных областей науки и отраслей промышленности, позволяет удерживать лидирующие позиции в использовании космического пространства и создаёт предпосылки для успешного осуществления перспективных космических программ. Это позволяет говорить о том, что создание современного КА, позволяющего осуществить проведение длительных космических экспериментов является одной из приоритетных задач для космической отрасли.

В последние два десятилетия в нашей стране длительные космические эксперименты осуществлялись в основном на борту МКС и КА серии «Фотон-М» / «Бион-М». Однако при проведении этих экспериментов необходимо было учитывать определенные трудности, возникшие из-за конструктивных особенностей указанных КА. В частности, проведение на российском сегменте МКС экспериментов в области микрогравитации осложняется присутствием возмущающих ускорений в широком спектре частот, вызванных упругими колебаниями конструкции МКС и рядом других обстоятельств. Проведение экспериментов на борту КА серии «Фотон-М» / «Бион-М» ограничено сроком существования их на орбите Земли, а также отсутствием возможности осуществлять непосредственный контроль за ходом проведения экспериментов.

Исходя из вышеизложенного, одним из целесообразных решений

представляется создание специального КА (автономного орбитального модуля) на основе одного из модулей разрабатываемой в настоящее время в ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королева» Российской орбитальной станции (РОС). Конструкция и режимы функционирования такого КА должны учитывать все необходимые условия для проведения самого широкого спектра космических экспериментов. Принципиальная особенность его функционирования должна состоять в возможности отделения от основной станции на длительный срок для обеспечения необходимых условий проведения экспериментов с последующей обратной стыковкой для получения материалов, использовавшихся в экспериментах, обслуживания научного оборудования и т.п.

Другим возможным решением задачи проведения длительных космических экспериментов является создание КА с возвращаемым модулем, как это было реализовано на КА серий «Фотон-М» / «Бион-М». В этом случае, для увеличения срока активной эксплуатации, на КА необходимо разместить панели солнечных батарей и исполнительные органы системы управления для поддержания режима солнечной ориентации.

С учетом специфики КА, предназначенного для проведения длительных экспериментов в космосе, предъявляются особые требования к его конструкции, приборному составу системы управления, а также к реализации режимов углового движения.

Цель и задачи диссертационной работы

Данное диссертационное исследование нацелено на разработку теоретических положений и практических методов, которые позволят решить научную проблему, имеющую важное хозяйственное значение и состоящую в создании системы ориентации современного космического аппарата (КА), предназначенного для проведения на его борту экспериментов на орбите Земли в течение длительных интервалов времени. В качестве такого КА может рассматриваться как вновь разрабатываемое изделие, так и модернизированная версия уже существующего КА.

Конкретная **цель работы** состоит в разработке и исследовании комплекса режимов углового движения КА, обеспечивающих на борту необходимые условия для проведения длительных научных исследований широкого спектра на околоземной орбите. Поставленная цель подразумевает разработку и исследование законов управления угловым движением КА, оценку и прогнозирование условий проведения экспериментов на борту КА, выбор приборного состава и исполнительных органов системы управления угловым движением КА.

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Построение и реализация законов управления угловым движением КА, соответствующих цели данной работы. В качестве основных режимов углового движения КА при проведении экспериментов рассматриваются поддержание орбитальной и солнечной ориентаций в течение длительных интервалов времени. Режим орбитальной ориентации обеспечивает наиболее приемлемые микрогравитационные условия на борту КА, режим солнечной ориентации необходим при проведении экспериментов с использованием научного оборудования, потребляющего большой объем электрической энергии. Поскольку речь идет об эксплуатации КА в течение именно длительных интервалов времени, в качестве исполнительных органов системы ориентации КА рассматриваются только гироскопические или электромагнитные органы управления.

2. Прогнозирование и оценка минимально возможного уровня квазистатических микроускорений на борту КА в возможных местах установки научной аппаратуры в зависимости от целевой орбиты и реализуемого режима углового движения КА.

3. Исследование установившегося углового движения КА в процессе реализации разработанных режимов управления с целью выбора параметров законов управления, обеспечивающих заданные характеристики движения.

4. Обоснованный выбор параметров схемы расположения и характеристик гироскопических органов системы управления КА, обеспечивающих

реализацию построенных законов управления.

Решение вышеуказанных задач позволит обеспечить на борту КА необходимые условия для проведения космических экспериментов в течение длительных интервалов времени: низкий уровень величины и малую область вариации вектора микроускорений, высокий энергоъем от солнечных батарей, поддержание заданной устойчивой ориентации КА, высокую степень устойчивости к отказам приборов системы управления.

Структура работы и обзор исследований

Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения, библиографии и приложения.

Первая глава является вспомогательной, в ней вводятся используемые системы координат, уравнения движения КА, модели действующих моментов, методики расчета некоторых вспомогательных величин. Приведены геометрические и массово-инерционные характеристики условного КА, а также начальные параметры для нескольких вариантов его орбит, используемые в дальнейшей работе при численном исследовании полученных в диссертационной работе теоретических результатов. Орбиты рассматриваются близкие к круговым. Выбор указанных характеристик обусловлен тем, что тема данной работы посвящена исследованию динамики КА, предназначенных для проведения длительных научных экспериментов. Как правило, существующие КА такого типа имеют большую массу, а по форме представляют собой вытянутые, почти динамически симметричные конструкции [2, 5, 6]. Предполагается, что длительность автономного полета КА при проведении исследований в космосе может достигать 90-180 суток. Такая продолжительность полета подразумевает, что для ориентации и стабилизации КА нужно использовать гироскопические или электромагнитные исполнительные органы системы управления, которые и рассматриваются в данной работе.

В качестве одной из основных расчетных формул, используемых в работе, в первой главе приведен вывод известного ранее уравнения для расчета микроускорений $\mathbf{b}$, которое имеет вид [6]

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\mu_E}{r^3} \left(3 \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} \right) - \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (\text{B.1})$$

где $\boldsymbol{\rho}$ – радиус-вектор точки относительно центра масс КА в которой рассчитываются микроускорения, $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость КА, μ_E – гравитационный параметр Земли, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор центра масс КА, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{F}$ – главный вектор негравитационных сил, действующих на корпус КА, m – масса КА. Помимо этого, в первой главе проведен краткий анализ требований к микроускорениям, а также грубая оценка их уровня на борту рассматриваемого условного КА.

Далее за первой главой следуют пять основных глав. Ниже для каждой главы кратко описывается решаемая задача; состояние исследований в данной области; результаты, полученные в диссертационной работе, а также сведения об их опубликовании.

Во второй главе предлагается методика исследования устойчивости установившегося ориентированного движения КА. В качестве примера использования такой методики рассматривается хорошо известная задача исследования углового движение осесимметричного КА с постоянным магнитом под действием механического момента, создаваемого влиянием магнитного поля Земли (МПЗ). Предполагается, что такой механический момент достаточно велик и уравнения движения КА содержат большой параметр. Исследованием подобных задач занимались многие специалисты в области механики, такие как В.В. Белецкий, А.А. Воронин, Д.С. Иванов, В.И. Каленова, В.М. Морозов, М.Ю. Овчинников, В.И. Пеньков, Д.С. Ролдугин, В.В. Сазонов, В.А. Сарычев, А.А. Хентов, M. Lovera, M.L. Psiaki и др. Среди множества всех работ отдельно можно выделить [7 – 20].

Во второй главе исследование проводилось в несколько этапов. На первом

этапе построены установившиеся движения КА, в которых его продольная ось симметрии составляет малый угол с вектором напряженности МПЗ, собственный магнитный момент параллелен оси симметрии КА. Рассмотрено два случая движения: при наличии демпфирования и при его отсутствии. В данном случае не уточняется конкретный способ демпфирования, в уравнения углового движения вводится слагаемое с модельным коэффициентом демпфирования, пропорциональное угловой скорости движения КА. Орбитальное движение КА рассчитывается с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы. В уравнениях углового движения КА вектор магнитной индукции МПЗ рассчитывался в соответствии с моделью IGRF, описание которой приведено в первой главе работы.

На втором этапе исследования предложен способ аппроксимации ориентированного движения КА посредством набора периодических решений. Такая аппроксимация упрощает численное параметрическое исследование этого движения, что особенно актуально на длительных интервалах времени моделирования движения КА. Приведены результаты сравнения амплитудных спектров угловых скоростей исходных и аппроксимированных движений, показавшие практически полное их совпадение по базисным частотам.

На третьем этапе проведено параметрическое исследование устойчивости полученных с помощью аппроксимации периодических движений КА. Проведенное исследование, в частности на наличие резонансов в системе, позволило выбрать значение дипольного момента магнита, установленного на КА. Были получены значения мультипликаторов соответствующей системы уравнений периодических движений в вариациях.

Приведено доказательство существования периодических движений, полученных на втором этапе проведенного исследования.

Научная новизна данного исследования состоит в том, что при расчете периодических движений КА его орбита принимается кеплеровой эллиптической, а в качестве модели МПЗ рассматривается IGRF, модель прямого диполя здесь используется только для того, чтобы показать различия в

полученных решениях при сравнении этих двух моделей. Если принять орбиту КА круговой, а модель МПЗ в виде прямого диполя, то доказательство существования периодических движений сведется к ранее полученному результату, представленному в [15]. Основные публикации, в которых приведены результаты второй главы [21 – 23].

Предложенная во второй главе методика исследования устойчивости установившегося ориентированного движения КА, основанная на использовании аппроксимации такого движения посредством набора периодических решений, далее применяется в диссертационной работе для исследования режимов поддержания орбитальной и солнечной ориентации, реализованных с помощью электромагнитных органов системы управления КА.

В третьей главе предложена методика оценки и прогноза минимального уровня микроускорений на борту КА. Прогноз проводится с учетом конкретной орбиты и режима углового движения КА, для заданной точки борта. Положение исследуемой точки выбирается в пределах внутреннего рабочего отсека КА на максимальном удалении от центра масс КА. Следует уточнить, что в данной диссертационной работе речь идет только о квазистатических (низкочастотных) микроускорениях, поскольку именно они представляют наибольшую опасность при проведении большинства экспериментов [4].

В нашей стране одни из первых исследований по измерению микроускорений были проведены еще для ДОС «Салют-6», выведенной на орбиту в 1977 году [6, 24 – 26]. В дальнейшем задачам измерения, расчета и возможным способам снижения уровня микроускорений на борту КА было посвящено большое количество научных работ многих специалистов, среди которых: В.И. Абрашкин, Г.П. Аншаков, Е.В. Бабкин, И.В. Белоконов, М.Ю. Беляев, К.Е. Воронов, С.Д. Гришин, В.Б. Дубовский, Н.И. Ефимов, Д.А. Завалишин, С.Г. Зыков, М.М. Комаров, А.П. Лебедев, В.Л. Левтов, Л.Ф. Лесков, М.И. Монахов, С.С. Обыденников, Д.И. Орлов, Д.С. Павловский, А.В. Пияков, В.И. Полежаев, Ю.Я. Пузин, Г.Ф. Путин, Д.Н. Рулев, В.В. Савичев, В.В. Сазонов, В.А. Сарычев, А.В. Седельников, Н.Д. Семкин, В.М. Стажков,

Т.Н. Тянь, С.Ю. Чебуков, J.I. Alexander, Ch. Baugher, T. Beuselinck, R. Crouch, G. Martin, N. Ramachandran, C. Van Bavinchove, и др.

После ДОС серии «Салют» исследования микроускорений проводились на орбитальной станции «МИР», транспортных грузовых кораблях (ТГК) серии «Прогресс», КА серий «Фотон», «Бион», а также на МКС [4, 27 – 43]. Большинство работ в области исследования микроускорений посвящено либо проблемам их измерения в процессе полета [23 – 28, 31, 33 – 41], либо после полетной оценки их уровня на борту КА по косвенной телеметрической информации [42]. Еще часть работ посвящена влиянию условий на борту КА в процессе полета на проведение различных экспериментов в космосе [43], в частности исследованиям в области материаловедения [29, 30, 32], т.е. фактически формированию определенных требований к уровню и частотному диапазону микроускорений. Что касается решения задачи прогнозирования уровня микроускорений на борту КА, то стоит отметить одну из немногих работ в этой области – монографию [4]. В ней предложена авторская фрактальная модель оценки квазистатической компоненты микроускорений в зависимости от различных факторов на этапе еще раннего проектирования КА, предназначенного для проведения научных исследований в области микрогравитации.

В данной диссертационной работе для прогноза микроускорений предлагается использовать формулу (В.1), которая в более ранних исследованиях применялась только для расчета реальных квазистатических микроускорений, имевших место на летавших КА [28, 33, 35, 38]. В этом случае составляются уравнения движения КА, выбирается режим движения, вычисляется решение уравнений движения, моделирующее этот режим, и вдоль найденного решения рассчитывается микроускорение в заданной точке борта. Для оценки минимально возможных микроускорений в третьей главе находятся решения уравнений углового движения КА в режиме пассивной гравитационной ориентации, доставляющие минимум функционалу

$$\Phi = \int_0^T |\tilde{\omega}|^2 dt ,$$

где $\tilde{\omega}$ – собственная угловая скорость КА относительно центра масс, значение T равно нескольким орбитальным периодам. После осреднения на интервале времени 2 суток, полученные таким образом решения использовались, чтобы задать номинальное положение КА в режиме его орбитальной ориентации, реализуемым с помощью гироскопических исполнительных органов (гиросистемы). Построенный таким образом режим ориентации КА рассматривается во всей работе как эталонный, поскольку обеспечивает не только минимальный уровень микроускорений на борту, но и весьма малую скорость накопления гиросtatического момента.

Предложенный в третьей главе способ прогноза и оценки минимального уровня микроускорений, а также остальные полученные результаты были опубликованы в работах [44 – 47].

В четвертой главе исследуется активная стабилизация КА в режиме орбитальной ориентации. Рассматриваются два варианта поддержания режима – с помощью гиросистемы или электромагнитными исполнительными органами системы управления. Задача состоит в том, чтобы обеспечить режим ориентации КА близкий к эталонному, построенному в третьей главе. В случае использования гироскопических органов управления при поддержании орбитальной ориентации КА в течение как правило уже нескольких суток наступает т.н. «насыщение» гиросистемы [48, 49]. То есть гиросtatический момент, накапливаемый за счет воздействия на корпус КА внешних моментов, достигает своего предельного значения, вследствие чего гиросистема теряет возможность создавать управляющий момент. В каждом конкретном случае скорость насыщения гиросистемы определяется физическими характеристиками входящих в систему гироскопических органов управления, схемой их расположения, режимом ориентации КА и другими факторами.

Для того чтобы вернуть работоспособность гиросистемы необходимо уменьшить ее собственный кинетический момент (провести «разгрузку»), что

можно сделать только за счет внешнего момента противоположного знака, приложенного к корпусу КА. Поскольку работа посвящена динамике КА при проведении именно длительных космических исследований в космосе, то решение задачи разгрузки гиросистемы является весьма актуальным. Можно использовать ставший уже стандартным способ проведения разгрузки, который заключается в создании внешнего момента, приложенного к КА и образованного взаимодействием электромагнитных органов управления с МПЗ [48, 49]. Однако в этой работе используется несколько иной подход. Он основан на выборе такого режима ориентации КА, близкого к требуемому, который обеспечивает весьма низкую скорость накопления гиросtatического момента. Общий, упрощенный принцип такого подхода состоит в следующем. Рассмотрим теорему об изменении кинетического момента КА в виде $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}$, где $\mathbf{K}$ – суммарный кинетический момент корпуса КА с установленной в нем гиросистемой, $\mathbf{M}$ – главный момент внешних сил, приложенных к корпусу КА. Требуется остановить изменение $|\mathbf{K}|$, т.е.

$$\frac{d|\mathbf{K}|}{dt} = 0.$$

Запишем это условие в виде

$$\frac{d(\mathbf{K}^2)}{dt} = 0,$$

которое можно представить, как

$$\frac{d(\mathbf{K} \cdot \mathbf{K})}{dt} = \frac{d\mathbf{K}}{dt} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{K} \cdot \frac{d\mathbf{K}}{dt} = 2\mathbf{M} \cdot \mathbf{K} = 0.$$

Таким образом, знак $\dot{\mathbf{K}}$ определяется взаимным расположением векторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$, что можно использовать для проведения разгрузок, достаточно только применить соответствующий закон изменения управляющего момента гиросистемы. В англоязычной литературе такой подход к управлению угловым движением КА определяется понятием «momentum management». Среди работ, посвященных этой теме следует выделить [50 – 54]. В четвертой главе данной диссертационной работы предложены три закона управления, реализующие

режим орбитальной ориентации КА без накопления гиросtatического момента. Для реализации предложенных законов необходима информация о собственной угловой скорости КА, кинетическом моменте гиросистемы и об угловой ориентации КА относительно орбиты движения его центра масс. В данном случае основная задача управления угловым движением КА состоит в минимизации собственной угловой скорости и гиросtatического момента. Решение первой задачи обеспечивает приемлемую микрогравитационную обстановку на борту КА, а второй – большую длительность ее существования. В главе рассмотрены возможные способы выбора коэффициентов и показаны результаты численного моделирования уравнений движения КА, подтверждающие работоспособность этих законов и правильность выбора их коэффициентов. С помощью схемы, описанной в первой главе проведен частотный анализ микроускорений, возникающих на борту КА.

Помимо использования гиросистемы для поддержания режима орбитальной ориентации КА, в четвертой главе исследуется возможность поддержания указанного режима в окрестности гравитационно устойчивого положения равновесия с помощью электромагнитных органов управления. Несмотря на то, что в этом случае ориентация КА близка к гравитационно устойчивой, использование органов управления (гироскопических или электромагнитных) для ее поддержания оправдано из-за уменьшения уровня микроускорений на борту. Кроме того, использование управления позволяет избежать возможного негативного влияния восстанавливающего аэродинамического момента на ориентацию КА [5, 55 – 60]. Задачи использования электромагнитной системы управления для стабилизации углового движения КА исследованы в работах таких специалистов как А.Ю. Александров, В.В. Белецкий, А.В. Грушевский, Д.С. Иванов, В.И. Каленова, С.О. Карпенко, В.М. Морозов, М.Ю. Овчинников, В.И. Пеньков, Д.С. Ролдугин, В.В. Сазонов, В.А. Сарычев, А.А. Тихонов, С.С. Ткачев, А.С. Stickler, M. Lovera, M.L. Psiaki и других [61 – 79]. В отличие от указанных работ, в данном случае рассматриваются наиболее простые варианты реализации управления электромагнитными исполнительными органами, с

использованием по возможности минимальной информации от датчиков системы управления. В частности, рассматривается закон, позволяющий использовать результаты обработки измерений магнетометра на борту КА. Примеры успешной реализации подобной обработки показаны в работах [19, 80 – 88]. В данном случае основная задача управления угловым движением состоит в гашении начальных возмущений движения и минимизации собственной угловой скорости КА. В главе приведены результаты численного моделирования уравнений движения КА, подтверждающие работоспособность выбранных законов управления электромагнитными исполнительными органами для поддержания режима орбитальной ориентации КА. Далее, с помощью методики, изложенной во второй главе, проведено исследование устойчивости полученных решений уравнений движения КА.

Основные публикации, в которых приведены результаты четвертой главы [89 – 92].

Одним из рассмотренных функциональных ограничений, накладываемых на КА в диссертационной работе, является наличие жестко закрепленных относительно корпуса КА панелей солнечных батарей (СБ). В данном случае выбор такого способа крепления СБ обусловлен двумя причинами: во-первых, в процессе работы привод, обеспечивающий вращение панелей СБ, может вносит дополнительные возмущения при проведении экспериментов, а во-вторых, жесткое закрепление панелей СБ на корпусе КА может уменьшить возмущения, вызванные упругими колебаниями конструкции. Подобная схема закрепления панелей СБ была реализована на КА «Фотон-М4», «Бион-М1», на КА серии «Молния» и др. Основной недостаток подобной конструкции КА состоит в низком притоке электроэнергии в режиме орбитальной ориентации на большинстве орбит. Для проведения исследований в космосе, в которых задействовано оборудование с высоким потреблением энергии, необходимо использовать режим солнечной ориентации КА.

В пятой главе исследуется активная стабилизация КА в режиме солнечной ориентации. В данной работе под солнечной ориентацией КА подразумевается

режим, при котором ось нормали к плоскости панелей СБ направлена на Солнце, и режим поддерживается либо с помощью гиросистемы, либо электромагнитными исполнительными органами при наличии постоянного гиросtatического момента.

В случае использования гиросистемы реализовать режим солнечной ориентации КА описанный выше не представляет значительных трудностей. Для этого достаточно использовать тривиальный закон управления в виде ПД-регулятора, как показано в пятой главе. Но при этом накопление собственного кинетического момента гиросистемы в большинстве случаев будет происходить еще с большей скоростью, чем в режиме орбитальной ориентации для того же КА. Поэтому, чтобы реализовать большую длительность поддержания режима солнечной ориентации КА необходимо использовать законы управления механическим моментом гиросистемы, обеспечивающие не только заданную ориентацию, но и одновременную разгрузку гиросtatического момента за счет внешних моментов (например, гравитационного или солнечного). В качестве примера использования таких законов управления можно привести [93, 94]. В пятой главе диссертационной работы построен и исследован новый закон управления, реализующий режим солнечной ориентации КА без накопления гиросtatического момента. Чтобы не нарушать режим солнечной ориентации, гиросtatический момент можно контролировать только за счет изменения угла поворота КА вокруг нормали к плоскости панелей СБ, меняя соответствующим образом величину $(\mathbf{M}_g \cdot \mathbf{K})$, где $\mathbf{M}_g$ – гравитационный момент, действующий на корпус КА. В главе приведены результаты численного исследования, показавшие эффективность предложенного закона управления. Проведен численный анализ микроускорений, показавший, что дополнительное угловое движение КА относительно нормали к плоскости СБ не вносит значимого вклада в общий уровень микроускорений на борту КА.

Далее, в пятой главе предложен способ реализации режима солнечной ориентации КА – гиростата с использованием электромеханических

исполнительных органов и постоянного гиросtatического момента. Предполагается, что такой гиросtatический момент достаточно велик и уравнения движения КА содержат большой параметр. Среди множества работ, посвященных способам реализации режима солнечной ориентации КА с помощью электромагнитной системы управления можно выделить [79, 95 – 100].

В данной работе режимом солнечной ориентации КА будем называть такое движение, в котором с малыми ошибками выполнены следующие условия: главная центральная ось наименьшего момента инерции лежит в плоскости орбиты, вдоль этой оси направлен постоянный гиросtatический момент; главная центральная ось наибольшего момента инерции (нормаль к панелям СБ) направлена на Солнце; угловая скорость КА равна нулю. Сперва будем рассматривать такой режим ориентации КА – гиростата в упрощенной ситуации, когда главная центральная ось наименьшего момента инерции является осью материальной симметрии КА, орбита центра масс КА – круговая и неизменная в абсолютном пространстве, на корпус КА действует только гравитационный момент. Задачи с подобной постановкой рассмотрены в работах [101 – 107]. Отдельно стоит отметить работы [108 – 111], посвященные исследованию периодических решений дифференциальных уравнений, содержащих большой параметр (в данном случае это постоянный гиросtatический момент КА).

В частности, в [105 – 107] доказано, что в рассмотренной выше упрощенной ситуации уравнения углового движения КА имеют периодическое решение, которое является орбитально устойчивым в первом приближении. В [107] показано, что:

- в предположении, что гиросtatический момент направлен по оси материальной симметрии КА – гиростата, под действием гравитационного момента ось симметрии КА, центр масс которого движется по неизменной круговой орбите, может совершать периодические колебания в малой окрестности произвольного неизменного направления в абсолютном пространстве, лежащего в плоскости орбиты. Такие движения существуют при достаточно больших значениях гиросtatического момента, лежащих вне малых

окрестностей выколотых точек, которые образуют арифметическую прогрессию. Период таких колебаний равен половине орбитального периода¹.

- в случае, если для аналогичной постановки задачи в начальный момент времени ось симметрии КА составляет с плоскостью орбиты ненулевой угол, существует однопараметрическое семейство симметричных периодических движений оси симметрии КА относительно орбитальной системы координат, которые выглядят в абсолютном пространстве как медленная прецессия оси симметрии вокруг нормали к плоскости орбиты. Период таких движений близок орбитальному периоду. Порождающими решениями служат решения, которые в абсолютном пространстве представляют собой покой, причем ось симметрии составляет с плоскостью орбиты ненулевой угол (параметр семейства). Такие движения существуют при достаточно больших значениях гиросtatического момента, лежащих вне малых окрестностей выколотых точек¹.

Предельный случай найденных в [105 – 107] периодических движений послужил основой при разработке режима солнечной ориентации КА – гиростата с использованием электромеханических исполнительных органов, представленного в пятой главе данной работы. Из-за разного рода возмущающих факторов (относительно небольшая динамическая асимметрия КА, эллиптичность орбиты, наличие аэродинамического момента и др.) уравнения движения КА не имеют точных решений, описанных в [107]. Но они имеют решения, которые будут близки к точным в течение некоторого не очень большого отрезка времени. Чтобы обеспечить стабилизацию режима солнечной ориентации КА – гиростата в течение длительного отрезка времени можно использовать управляющий момент, создаваемый взаимодействием электромеханических исполнительных органов с МПЗ. В пятой главе реализована стабилизация описанного выше режима солнечной ориентации

¹ Троицкая А.В. Периодические колебания механических систем, уравнения движения которых содержат большой параметр. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Москва: МГУ им. М.В. Ломоносова. Механико-математический факультет, 2019.

КА – гиростата с помощью закона управления на основе ПД регулятора, приведены результаты численного моделирования. С помощью методики, изложенной во второй главе, проведено численное параметрическое исследование устойчивости полученных решений уравнений углового движения КА с целью исключить выбор резонансного значения постоянного гиросtatического момента КА [107]. Были получены значения мультипликаторов соответствующей системы уравнений периодических движений в вариациях.

Основные публикации, в которых приведены результаты пятой главы [46, 112 – 119].

В предыдущих главах все задачи управления КА с помощью гиросистемы рассматривались в терминах создаваемого ею суммарного кинетического момента. При этом остается не затронутым вопрос, какие конкретно исполнительные гироскопические органы используются в составе гиросистемы. **В шестой главе** данной диссертационной работы рассматриваются задачи, связанные с использованием как одностепенных (двигатели-маховики), так и двухстепенных (гиродины) гироскопических органов управления для стабилизации режимов орбитальной и солнечной ориентации КА, рассмотренных в главах 4 и 5. Все возможные типы существующих гироскопических органов управления угловым движением КА, а также общие вопросы, связанные с их применением довольно подробно представлены в работах [48, 49].

Сперва в шестой главе рассматривается система гироскопических исполнительных органов КА, построенная на базе двигателей-маховиков. Маховичные системы получили очень широкое распространение, исследованию динамики КА с такими системами посвящено огромное количество работ, здесь в качестве примера можно привести работы [120, 121]. В данной диссертационной работе предложена методология выбора геометрических параметров схемы расположения и физических характеристик двигателей-маховиков, обеспечивающих реализацию любых режимов углового

движения КА. В качестве схемы расположения системы маховиков выбрана «четырехугольная пирамида», как одна из самых универсальных и широко используемых при эксплуатации КА [49, 122 – 124]. Предложенная методология основана на геометрическом сравнении требуемой и реализуемой областей изменения в связанной с КА системе координат вектора суммарного кинетического момента, создаваемого гиросистемой. Поскольку рассматривается система из четырех одинаковых маховиков, то вид области реализуемых значений вектора суммарного кинетического момента известен [120, 125, 126] и определяется тремя параметрами: собственным кинетическим моментом каждого маховика и двумя углами (углы установки маховиков), определяющими положение оси вращения каждого маховика относительно системы координат жестко связанной с КА. Вид области требуемых значений вектора суммарного кинетического момента, создаваемого маховиками, зависит от режима углового движения КА. В данной главе рассматриваются три возможных варианта режимов движения: программные развороты с одинаковым значением требуемой угловой скорости КА относительно произвольного направления, стабилизация орбитальной ориентации КА, стабилизация солнечной ориентации КА. Для всех трех вариантов приведены аналитические зависимости, позволяющие выбрать углы установки маховиков в зависимости от массово-инерционных характеристик и требований рассматриваемого режима ориентации КА. Для режимов стабилизации орбитальной и солнечной ориентации приведены результаты численного моделирования уравнений движения КА, подтверждающие правильность полученных значений углов установки маховиков.

Предложенный выше подход к сравнению областей изменения вектора суммарного кинетического момента, создаваемого гиросистемой, справедлив для систем управления, построенных как на основе двигателей-маховиков, так и гироскопов. Одним из недостатков использования гироскопов в качестве исполнительных органов системы управления является сложность алгоритмов управления. В том числе это связано и с наличием особых (сингулярных)

поверхностей в области реализуемых значений вектора суммарного кинетического момента системы гиродинов. Решением задач, связанных с управлением угловым движением КА с помощью гиродинов занимались такие специалисты как Н.И. Амелькин, Н.И. Башкеев, В.П. Легостаев, В.В. Сазонов, Е.И. Сомов, В.Н. Платонов, А.В. Сорокин, А.В. Сумароков, Е.Н. Токарь, N. Bedrossian, J. Junkins, H. Kurokawa, F. Leve, H. Schaub, B. Wie [127 – 136].

В заключительной части шестой главы предлагается новый способ расчета и построения особых поверхностей области реализуемых значений вектора суммарного кинетического момента систем безупорных гиродинов. В отличие от работ [129, 136], в данной работе используется способ, основанный на методе продолжения по параметру [137, 138]. На основе работ [128, 129] в шестой главе формализованы достаточные условия, позволяющие в ряде случаев определить тип особых поверхностей. Для гиродинов, расположенных на КА по схеме «3-SPE», приведены примеры построения особых поверхностей, которые совпали с соответствующими поверхностями, построенными в работе [130].

Основные публикации, в которых приведены результаты, представленные в шестой главе [112, 118, 119, 139 – 143]. Реализован программно-математический комплекс, используемый для расчета и построения особых поверхностей областей вариации вектора суммарного кинетического момента систем безупорных гиродинов [144].

Используемые методы исследования

Используемые в данной работе методы основаны на классических подходах теоретической механики. Применяется теория орбитального движения ИСЗ. Используются теория устойчивости [145, 146], математическая теория автоматического управления [147], теория периодических решений для линейных систем с периодическими коэффициентами [148], методика анализа временных рядов [149] и методы оптимизации [150]. В каждой главе для получения численных результатов широко применяются различные численные методы, с использованием которых реализовано математическое моделирование

орбитального и углового движения КА [151].

Научная новизна

Научная новизна в данной работе обусловлена спецификой требований, предъявляемых к управляемым угловым движениям КА, условиям на борту, а также особенностями конструкции КА. Новизна заключается:

- в предложенной методике прогнозирования и оценки уровня микроускорений на борту КА в зависимости от начальных параметров целевой орбиты и реализуемого режима углового движения КА;
- в предложенной методике численного параметрического исследования устойчивости установившегося ориентированного движения КА, центр масс которого движется по околоземной орбите, близкой к круговой;
- в разработанных новых законах управления угловым движением КА при наличии функциональных ограничений и течение длительных интервалов времени;
- в предложенной методике выбора параметров схем расположения и характеристик гироскопических органов системы управления КА, обеспечивающих реализацию предложенных законов управления различными режимами углового движения КА.

Практическая значимость и реализация результатов работы

Полученные в диссертации результаты являются теоретической основой для создания перспективного КА, предназначенного для проведения длительных научных экспериментов широкого спектра на орбите Земли и, в частности, позволяют значительно сократить время и затраты на создание системы управления угловым движением КА на этапе эскизного проектирования.

Все полученные в работе результаты можно использовать как в совокупности для реализации главной цели работы, так и по отдельности, для решения различных прикладных задач, связанных с управлением угловым движением различных КА.

Результаты проведенных исследований использовались на этапах эскизного проектирования при разработке систем ориентации различных КА и разгонных блоков, как уже созданных, так и вновь создаваемых в АО «ГКНПЦ имени М.В. Хруничева» и в ООО «Спутникс» (соответствующие акты о внедрении приведены в Приложении). Все полученные в представленной диссертации результаты можно использовать при разработке изделий ракетно-космической техники на таких предприятиях как ПАО «РКК «Энергия» имени С.П. Королева», АО «РКЦ «Прогресс», АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М.Ф. Решетнева, АО «НПО Лавочкина», АО «ВПК «НПО машиностроения» и др.

Кроме того, полученные результаты диссертационной работы легли в основу дисциплины «Математическое моделирование систем гироскопических и электромагнитных органов управления угловым движением космических аппаратов», которая читается студентам кафедры «Теоретическая механика» имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ имени Н.Э. Баумана по направлению подготовки 01.03.03 «Механика и математическое моделирование».

Созданная на основе результатов представленной работы «Программа расчета и визуализации сингулярных состояний силовых гироскопических комплексов (гиродинов)» [144] внедрена в учебный процесс и используется при подготовке студентов МГТУ имени Н.Э. Баумана в рамках дисциплин «Математическое моделирование систем гироскопических и электромагнитных органов управления угловым движением космических аппаратов» (кафедра «Теоретическая механика») и «Электромеханические исполнительные органы систем управления КА» (кафедра «Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации»).

«Программно-математический комплекс для моделирования управляемого углового движения КА» [151], разработанный и использованный в рамках данной работы, внедрен в учебный процесс и используется при подготовке студентов МГТУ имени Н.Э. Баумана в рамках дисциплины «Движение искусственных спутников Земли относительно центра масс» (кафедра

«Теоретическая механика»).

Получено 6 актов о внедрении результатов данной диссертационной работы (см. Приложение).

Личный вклад автора

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора. Все результаты диссертации получены автором лично. В диссертации используются полученные ранее другими авторами вспомогательные результаты, на которые приведены соответствующие ссылки по тексту работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад соискателя был определяющим.

Достоверность и апробация работы

Достоверность подтверждается соответствием результатов теоретических исследований, численного моделирования, летных испытаний, а также сравнением с результатами, опубликованными другими авторами по схожим проблемам.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих ведущих конференциях и семинарах:

- XIII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Санкт-Петербург, 2023;
- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Уфа, 2019;
- XI Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Казань, 2017;
- Международная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики (FAPM-2017)». Москва, 2017;
- Международная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики (FAPM-2022)». Москва, 2022;

- Международная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики (FAPM-2023)». Москва, 2023;
- XL, XLI, XLII, XLIII, XLIV, XLV, XLVI, XLVII Академические чтения по космонавтике (Королевские чтения). Москва, 2016, 2107, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023;
- Семинар по механике космического полета имени В.А. Егорова механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (под руководством В.В. Сазонова), 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021;
- Семинар «Динамика космических систем» отдела №7 ИПМ имени М.В. Келдыша РАН (под руководством М.Ю. Овчинникова), 2023;
- Московский городской научно-методический семинар по теоретической механике кафедры «Теоретическая механика» имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ имени Н.Э. Баумана (под руководством И.Г. Благовещенского), 2022, 2023;
- Семинар «Динамические системы и механика» кафедры «Теоретическая механика и мехатроника» МАИ (под руководством Б.С. Бардина), 2023, 2024;
- Семинар «Теория управления и динамика систем» ИПМех имени А.Ю. Ишлинского РАН (под руководством Ф.Л. Черноусько), 2024;
- Семинар секции теоретической механики имени профессора Н.Н. Поляхова Санкт-Петербургского Дома ученых РАН (под руководством М.П. Юшкова), 2024;
- Заседание Президиума Научно-методического совета по теоретической механике Министерства науки и высшего образования РФ (под руководством В.А. Самсонова), 2024;
- Семинар имени А.Ю. Ишлинского по прикладной механике и управлению механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (под руководством В.В. Александрова, Н.А. Парусникова, Ю.В. Болотина), 2024;

- Семинар «Механика систем им. академика А.Ю. Ишлинского» при Научном совете РАН по механике систем (под руководством В.Ф. Журавлева, Д.М. Климова), 2024.
- Научный семинар кафедры теоретической механики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) (под руководством С.В. Соколова), 2024.

Публикации

По теме работы имеется 17 публикаций в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ, в том числе 11 научных статей в российских переводных журналах, англоязычные версии которых индексируются в базах Web of Sciences и Scopus. Получено 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Список публикаций в российских переводных журналах:

1. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Исследование особых поверхностей систем безупорных гиродин методом продолжения по параметру. Космические исследования, 2009 г., том 47, №4, с. 355 – 362.
2. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режимов вращательного движения ИСЗ с малым уровнем микроускорений электромеханическими исполнительными органами. Космические исследования, 2012 г., том 50, №5, с. 380 – 393.
3. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Оценка остаточных микроускорений на борту ИСЗ в режиме одноосной солнечной ориентации. Космические исследования, 2013 г., том 51, №5, с. 380 – 388.
4. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима солнечной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления. Космические исследования, 2018 г., том 56, №5, с. 375 – 383.
5. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режима орбитальной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы. Изв. РАН. ТиСУ, 2020 г., №1, с. 129 – 142.

6. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима гравитационной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления. Космические исследования, 2020 г., том 58, №1, с. 40 – 48.
7. Игнатов А.И. Стабилизация режима солнечной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы. Изв. РАН. ТиСУ, 2020 г., №3, с. 164 – 176.
8. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Исследование установившихся движений искусственного спутника Земли в режиме одноосной магнитной ориентации. Космические исследования, 2021 г., том 59, №2, с. 135 – 148.
9. Игнатов А.И. Оценка низкочастотных микроускорений на борту искусственного спутника Земли в режиме солнечной ориентации. Космические исследования, 2022 г., том 60, №1, с. 43 – 56.
10. Игнатов А.И. Выбор геометрических параметров расположения системы двигателей-маховиков при управлении вращательным движением космического аппарата. Изв. РАН. ТиСУ, 2022 г., №1, с. 124 – 144.
11. Игнатов А.И., Иванов Г.А., Коломиец Е.С., Мартыненко Е.В. Реализация режима солнечной ориентации космического аппарата с помощью системы двигателей-маховиков. Космические исследования, 2023 г., том 61, №2, с. 143 – 156.

Препринты ИПМ имени М.В. Келдыша РАН (только с 2016 г. по н.в.):

12. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима гравитационной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, №28, 2016 г., 32 с.
13. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима солнечной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, №80, 2017 г., 31 с.
14. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима орбитальной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента

гиросистемы. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, №2, 2018 г., 30 с.

15. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Исследование установившихся движений искусственного спутника Земли в режиме одноосной магнитной ориентации. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, №25, 2019 г., 44 с.

16. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режима солнечной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, №99, 2019 г., 27 с.

17. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Оценка уровня квазистатических микроускорений на борту искусственного спутника Земли в режиме солнечной ориентации. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, №54, 2020 г., 28 с.

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ:

1. Программа расчета и визуализации сингулярных состояний силовых гироскопических комплексов (гиродинов). Авторы: Игнатов А.И., Мартыненко Е.В. Свидетельство № 2023681348, зарегистрировано 12.10.2023.
2. Программно-математический комплекс для моделирования управляемого углового движения космических аппаратов. Автор: Игнатов А.И. Свидетельство № 2024616504, зарегистрировано 21.03.2024.

Положения, выносимые на защиту

1. Разработана методика численного параметрического исследования устойчивости установившихся режимов угловых движений КА близких к периодическим, основанная на аппроксимации таких движений последовательностью периодических решений модифицированных уравнений движения. Указанная методика позволяет эффективно выбирать необходимые значения параметров используемых законов управления угловым движением космического аппарата [21 – 23, 92, 114, 115].

2. Для режима одноосной магнитной ориентации осесимметричного КА доказано существование периодических решений модифицированных уравнений движения в случае использования модели IGRF магнитного поля Земли (МПЗ). С помощью методики численного параметрического исследования установившихся режимов угловых движений КА изучено влияние значений параметров уравнений движения на возникновение резонансов между вращением вектора индукции МПЗ вдоль орбиты и колебания продольной оси симметрии КА относительно этого вектора [21, 23].
3. Для режима орбитальной ориентации КА разработана методика прогнозирования и оценки минимального уровня микроускорений в заданной точке борта. С помощью разработанной методики получены оценки уровня микроускорений для КА в режиме его орбитальной ориентации близкой к гравитационно устойчивой [44 – 47, 112, 113, 118, 119].
4. На основе известной ранее функции Ляпунова построен закон управления режимом орбитальной ориентации КА с помощью системы гироскопических исполнительных органов. Построенный закон помимо поддержания заданной ориентации КА ограничивает накопление собственного кинетического момента гиросистемы. Реализованы варианты закона, обеспечивающие орбитальную ориентацию КА как в окрестности гравитационно устойчивого, так и неустойчивого положений равновесия. Предложена численно-аналитическая методика выбора параметров для всех вариантов реализации закона управления [89, 91].
5. Построен закон управления режимом солнечной ориентации КА, реализуемый с помощью системы гироскопических исполнительных органов в условиях ограничения накопления гиросtatического момента и отсутствия возможности изменения положения солнечных батарей относительно корпуса КА. Такой закон управления позволяет не только поддерживать солнечную ориентацию КА на длительных интервалах времени, но и проводить разгрузку накопленного кинетического момента гиросистемы. [46, 112, 113, 116 – 119,

143].

6. На основе известного ранее теоретического исследования разработан и с помощью разработанной методики исследован режим солнечной ориентации КА, реализуемый системой магнитных исполнительных органов при наличии постоянного гиросtatического момента и отсутствии возможности изменения положения солнечных батарей относительно корпуса КА [114, 115].

7. Разработана методика выбора геометрических параметров схемы расположения и физических характеристик двигателей-маховиков, обеспечивающих реализацию предложенных режимов углового движения КА. Получены аналитические зависимости для выбора геометрических параметров системы двигателей-маховиков, расположенных по схеме «четырехугольная пирамида» при реализации режима программных разворотов КА, а также для поддержания орбитальной и солнечной ориентации КА [139, 142, 143].

8. Предложен и обоснован способ расчета и построения особых поверхностей систем безупорных гиродинов, основанный на методе продолжения по параметру. Формализованы достаточные условия, позволяющие определить тип особых поверхностей. Для системы гиродинов, установленных на КА по схеме «3-SPE» приведены примеры построения особых поверхностей. Реализован соответствующий программно-математический комплекс, используемый при выборе геометрических параметров схемы расположения гиродинов [140, 141, 144].

Объем работы

Диссертационная работа состоит из 300 страниц машинописного текста, трех таблиц и 126 рисунков. Она включает в себя введение, шесть глав, заключение, список литературы, который состоит из 172 наименований, а также одно приложение.

Глава 1. Используемые системы координат, математические модели и уравнения движения

В главе описаны системы координат, приведены некоторые математические модели и схемы расчета величин, используемых в данной диссертационной работе. Показаны уравнения движения, а также начальные параметры орбит, используемые при численном моделировании движения КА. Представлен вывод формулы для расчета микроускорений.

1.1 Системы координат

Связанная система координат $Ox_1x_2x_3$, образована главными центральными осями инерции КА. Базисные орты системы $Ox_1x_2x_3$ обозначены $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Гринвичская система координат $O_EY_1Y_2Y_3$. Начало системы находится в центре Земли, плоскость $O_EY_1Y_2$ совпадает с плоскостью экватора, ось O_EY_1 пересекает гринвичский меридиан, ось O_EY_3 направлена к Северному полюсу. Полагаем, что эта система вращается с постоянной угловой скоростью ω_E вокруг оси O_EY_3 .

Орбитальная система координат $OX_1X_2X_3$. Оси OX_3 и OX_2 направлены соответственно вдоль геоцентрического радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки O и вектора $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ кинетического момента орбитального движения КА. Угловая скорость этой системы

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}{r^2} + \frac{\ddot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}{r^2 |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|} \mathbf{r}, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

Базисные орты этой системы обозначены $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$.

Квазиинерциальная система координат $O_EZ_1Z_2Z_3$. Ось O_EZ_2 параллельна вектору кинетического момента орбитального движения КА, ось O_EZ_3 лежит в плоскости экватора Земли и направлена в восходящий узел

оскулирующей орбиты КА. Базис этой системы образован ортами $\mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2, \mathbf{E}'_3$.

Система координат $O\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3$, связанная с вектором $\mathbf{B}$ индукции магнитного поля Земли (МПЗ) в точке O . Базисные орты этой системы обозначены $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Орт $\mathbf{e}'_1$ направлена вдоль вектора $\mathbf{B}$, $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{B} / B$, $B = |\mathbf{B}|$. Орт $\mathbf{e}'_3$ направлен по нормали к плоскости образованной вектором $\mathbf{B}$ и вектором $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ кинетического момента орбитального движения КА, таким образом, что

$$\mathbf{e}'_3 = \frac{(\mathbf{e}'_1 \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}))}{|\mathbf{e}'_1 \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})|}.$$

Орт $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_3 \times \mathbf{e}'_1$ дополняет систему до правой.

Система координат $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$, образованная осями Резаля КА, обладающего динамической симметрией. Система $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ не участвует в угловом движении КА относительно оси его динамической симметрии, вдоль орта которой направлена ось $O\tilde{x}_1$. Таким образом, система $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ получается из системы $Ox_1x_2x_3$ при нулевом значении угла поворота относительно оси Ox_1 .

Матрицы перехода от орбитальной и от квазиинерциальной систем к гринвичской системе обозначим $V = (v_{ij})_{i,j=1}^3$ и $\tilde{V} = (\tilde{v}_{ij})_{i,j=1}^3$ соответственно, где v_{ij} – косинус угла между осями $O_E Y_i$ и $O X_j$, а $\tilde{v}_{ij}$ – косинус угла между осями $O_E Y_i$ и $O_E Z_j$. Элементы этих матрицы выражаются через компоненты геоцентрического радиус-вектора точки O и вектора скорости этой точки относительно поверхности Земли в гринвичской системе координат.

Матрицы перехода от системы $Ox_1x_2x_3$ к гринвичской, орбитальной и квазиинерциальной системам обозначим соответственно $W = (w_{ij})_{i,j=1}^3$, $U = (u_{ij})_{i,j=1}^3$ и $\tilde{U} = (\tilde{u}_{ij})_{i,j=1}^3$. Здесь $u_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_j$, $\tilde{u}_{ij} = \mathbf{E}'_i \cdot \mathbf{e}_j$, w_{ij} , u_{ij} и $\tilde{u}_{ij}$ – косинусы углов, которые ось Ox_j образует с осями $O_E Y_i$, $O X_i$ и $O_E Z_i$. Справедливы соотношения $W = VU$ и $W = \tilde{V}\tilde{U}$.

Матрицу U параметризуем углами γ , δ и β , которые введем

следующим образом. Система $Ox_1x_2x_3$ может быть получена из системы $OX_1X_2X_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол $\delta + \pi/2$ вокруг оси OX_2 , 2) на угол β вокруг новой оси OX_3 , 3) на угол γ вокруг оси OX_1 , полученной после первых двух поворотов и совпадающей с осью Ox_1 . Элементы матрицы U выражаются через эти углы с помощью формул

$$\begin{aligned} u_{11} &= -\sin \delta \cos \beta, & u_{12} &= \cos \delta \sin \gamma + \sin \delta \sin \beta \cos \gamma, \\ u_{21} &= \sin \beta, & u_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, \\ u_{31} &= -\cos \delta \cos \beta, & u_{32} &= -\sin \delta \sin \gamma + \cos \delta \sin \beta \cos \gamma, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} u_{13} &= \cos \delta \cos \gamma - \sin \delta \sin \beta \sin \gamma, \\ u_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, \\ u_{33} &= -\sin \delta \cos \gamma - \cos \delta \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

Матрицу $\tilde{U}$ параметризуем углами ψ , θ и φ , которые введем следующим образом. Если точку O_E перенести в точку O , то система $Ox_1x_2x_3$ может быть получена из системы $O_EZ_1Z_2Z_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол ψ вокруг оси O_EZ_2 , 2) на угол $\pi/2 - \theta$ вокруг новой оси O_EZ_1 , 3) на угол $\varphi + \pi$ вокруг оси новой оси O_EZ_2 полученной после первых двух поворотов и совпадающей с осью Ox_2 . Элементы матрицы $\tilde{U}$ выражаются через эти углы с помощью формул

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{11} &= -\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta, & \tilde{u}_{12} &= \sin \psi \cos \theta, \\ \tilde{u}_{21} &= -\sin \varphi \cos \theta, & \tilde{u}_{22} &= \sin \theta, \\ \tilde{u}_{31} &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \theta, & \tilde{u}_{32} &= \cos \psi \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{13} &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \sin \theta, \\ \tilde{u}_{23} &= \cos \varphi \cos \theta, \\ \tilde{u}_{33} &= \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \theta. \end{aligned}$$

Матрицу $\tilde{U}$ также можно параметризовать углами γ , δ и β . В этом случае ее элементы $(\tilde{u}_{ij})_{i,j=1}^3$ выражаются через углы γ , δ , β с помощью тех же соотношений что и соответствующие элементы матрицы U . Эти формулы обозначим (1.2').

В некоторых задачах, рассмотренных в данной работе, положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $O_EY_1Y_2Y_3$ будем задавать с помощью нормированного кватерниона $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, $\|Q\|=1$. Здесь символом $\|\cdot\|$ обозначается норма кватерниона. Кватернионная формула перехода между системами координат $Ox_1x_2x_3$ и $O_EY_1Y_2Y_3$ имеет вид

$$(0, Y_1, Y_2, Y_3) = Q \circ (0, x_1, x_2, x_3) \circ Q^{-1}.$$

Здесь символом $\circ$ обозначается кватернионное произведение. Элементы матрицы $W = (w_{ij})_{i,j=1}^3$ выражаются через компоненты Q по формулам:

$$\begin{aligned} w_{11} &= q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2, & w_{12} &= 2(q_1q_2 - q_0q_3), & w_{13} &= 2(q_1q_3 + q_0q_2), \\ w_{21} &= 2(q_2q_1 + q_0q_3), & w_{22} &= q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2, & w_{23} &= 2(q_2q_3 - q_0q_1), \\ w_{31} &= 2(q_3q_1 - q_0q_2), & w_{32} &= 2(q_3q_2 + q_0q_1), & w_{33} &= q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2. \end{aligned}$$

1.2 Модели магнитного поля Земли

Одной из наиболее точных моделей МПЗ является модель **IGRF (International Geomagnetic Reference Field)**. В этой модели вектор индукции МПЗ записывается в виде [152] $\mathbf{B} = -\nabla(U_M)$, где потенциальная функция $U_M(r, \lambda', \vartheta', t)$ представлена в виде разложения в ряд

$$U_M = R_E \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_E}{r} \right)^{n+1} \left(g_n^m(t) \cos m\lambda' + h_n^m(t) \sin m\lambda' \right) P_n^m(\cos \vartheta').$$

Здесь λ' – долгота точки, в которой определяется вектор индукции, ϑ' – ее широта, r – расстояние от центра Земли до точки, R_E – средний радиус Земли, $g_n^m(t)$ и $h_n^m(t)$ – коэффициенты Гаусса, зависящие от времени и определяемые

из таблицы, приведенной в [152], P_n^m – квазинормализованные по Шмидту присоединенные функции Лежандра. Величины коэффициентов определяются эмпирически (коэффициенты, как и величина поля, получаемая по этой модели, измеряются в нТл). В последний год действия модели Международный геодезический и геофизический союз публикует новые коэффициенты IGRF, действующие следующие пять лет. Модель IGRF обычно используется при численном моделировании движения КА на этапе разработки, но не используются при аналитических исследованиях².

Помимо модели IGRF в данной работе используется упрощенная модель МПЗ, описываемая полем диполя, расположенного в центре Земли и антипараллельного ее оси вращения, т.н. **прямой диполь**. В этом случае в системе $OX_1X_2X_3$ выражение для вектора магнитной индукции Земли можно записать в виде [19]

$$\mathbf{B}_x = \mu_M r^{-3} (\sin i \cos u, \cos i, -2 \sin i \sin u)^T,$$

где магнитный момент Земли $\mu_M = 7.7245 \cdot 10^6$ Тл·км³, r – расстояние от центра Земли до точки в которой определяется вектор индукции, i – наклонение орбиты КА, u – аргумент широты. В других системах координат выражение для вектора $\mathbf{B}$ можно получить с использованием соответствующих матриц перехода.

Модель прямого диполя имеет периодический характер, что делает ее удобной при сравнении численных результатов, полученных с использованием модели IGRF.

1.3 Уравнения движения космического аппарата

Уравнения движения КА, используемые в данной работе при численном моделировании, состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает

² Ролдугин Д.С. Динамика космических аппаратов с активной магнитной системой ориентации. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. Москва: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2023.

движение центра масс КА в гринвичской системе координат $O_E Y_1 Y_2 Y_3$ с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы. Другая подсистема описывает угловое движение КА относительно центра масс.

В векторном виде подсистему уравнений движения центра масс КА можно представить, как [143, 153]:

$$\frac{\tilde{d}^2 \mathbf{r}}{dt^2} + 2(\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{v}) + \boldsymbol{\omega}_E \times (\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}) = -\frac{\mu_E}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{f}_d, \quad \mathbf{f}_d = \nabla U_G - c \rho_a \mathbf{v} \mathbf{v}. \quad (1.3)$$

Здесь символом $\tilde{d} / dt$ обозначена локальная производная вектора в системе $O_E Y_1 Y_2 Y_3$, $\boldsymbol{\omega}_E$ – вектор угловой скорости вращения Земли, $\mathbf{v} = \tilde{d} \mathbf{r} / dt$ – относительная скорость движения центра масс КА, $v = |\mathbf{v}|$, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор центра масс КА, μ_E – гравитационный параметр Земли, $\mathbf{f}_d$ – вектор суммарных возмущающих ускорений, действующих на КА, ∇U_G – градиент потенциала гравитационного поля Земли, за исключением потенциала центрального поля, c – баллистический коэффициент КА, ρ_a – плотность атмосферы в точке задаваемой вектором $\mathbf{r}$. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (36,36) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Влияние атмосферы на движение центра масс КА учитывается в виде силы лобового сопротивления с нулевым углом атаки. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее параметры рассчитываются согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Параметры атмосферы и баллистический коэффициент КА считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений орбитального движения.

Подсистема уравнений углового движения образована уравнениями, выражающими теорему об изменении кинетического момента КА в его движении относительно центра масс, записанными в системе $Ox_1 x_2 x_3$:

$$\frac{\tilde{d} \mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}. \quad (1.4)$$

Здесь символом $\tilde{d} / dt$ обозначена локальная производная вектора в системе

$Ox_1x_2x_3$, $\mathbf{K}$ – кинетический момента КА в его движении относительно центра масс, $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость КА, $\mathbf{M}$ – главный момент всех внешних сил, действующих на КА. В общем случае $\mathbf{M} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_m$, где $\mathbf{M}_g$, $\mathbf{M}_a$, $\mathbf{M}_m$ – гравитационный, аэродинамический и магнитный моменты соответственно.

Гравитационный момент $\mathbf{M}_g$ задается формулой [154]

$$\mathbf{M}_g = \nu(\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{I}}\mathbf{r}), \quad \nu = 3\mu_E/|\mathbf{r}|^5, \quad \hat{\mathbf{I}} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3), \quad (1.5)$$

где I_i – моменты инерции КА относительно осей Ox_i , $i = \overline{1,3}$.

Аэродинамический момент $\mathbf{M}_a$ в общем случае рассчитывается в зависимости от геометрических характеристик конкретного рассматриваемого КА и принятой модели взаимодействия атмосферы с его корпусом [155]. В данной работе аэродинамический момент вычислялся в предположении, что КА имеет форму прямого кругового цилиндра с двумя прикрепленными к нему одинаковыми прямоугольными пластинами – солнечными батареями (рис. 1.1).

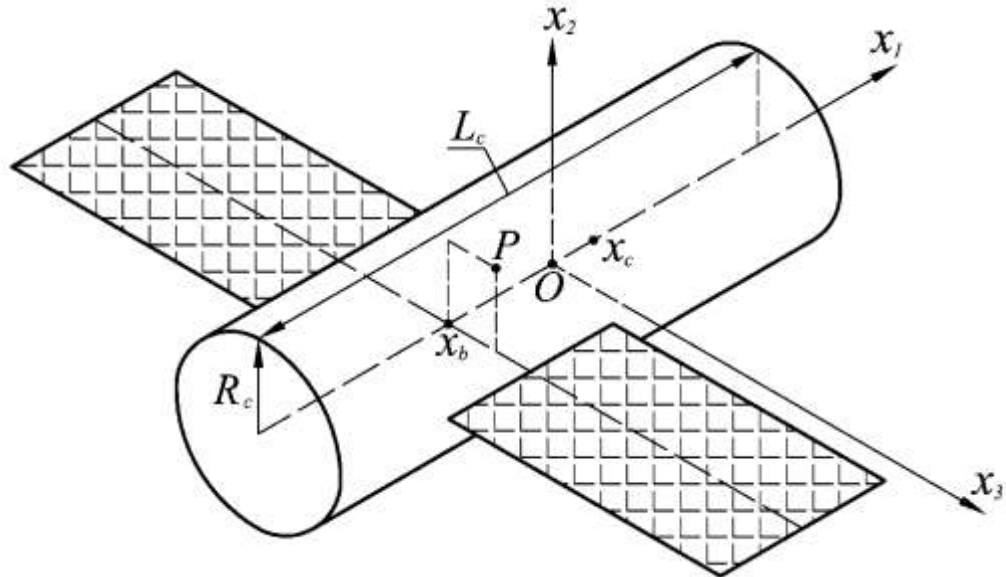


Рис. 1.1. Геометрическая форма КА и положение осей системы $Ox_1x_2x_3$.

Цилиндр имеет радиус R_c и высоту L_c , его ось совпадает с осью x_1 . Пластины жестко закреплены в плоскости x_1x_3 симметрично относительно оси x_1 .

Стороны пластин параллельны осям x_1 и x_3 . Суммарная площадь пластин составляет S_b . Координаты геометрических центров цилиндра и пластин суть $(x_c, 0, 0)$ и $(x_b, 0, 0)$. Полагая, что молекулы атмосферы при столкновении с корпусом КА испытывают абсолютно неупругий удар, формулу аэродинамического момента представим в виде [154]

$$\mathbf{M}_a = \rho_a \mathbf{v} (\mathbf{v} \times \mathbf{P}).$$

Здесь $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{v})$ – первый момент фигуры, являющейся проекцией КА на плоскость Π_v , перпендикулярную вектору $\mathbf{v}$. Вектор $\mathbf{P}$ лежит в плоскости Π_v и вычисляется относительно проекции на Π_v точки O . Формула аэродинамического момента не меняется при замене $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} + p\mathbf{v}$, где p произвольный скаляр, поэтому функцию $\mathbf{P}(\mathbf{v})$ можно задать, не связывая себя условием $\mathbf{P} \in \Pi_v$. Компоненты вектора $\mathbf{vP}(\mathbf{v})$ зададим в связанной системе координат, тогда формулу аэродинамического момента можно записать как:

$$\mathbf{M}_a = p(\mathbf{v} \times \mathbf{e}_1), \quad p = \rho_a \left(\pi R_c^2 x_c |v_1| + S_b x_b |v_2| + 2R_c L_c x_c \sqrt{v_2^2 + v_3^2} \right), \quad (1.6)$$

где v_i – компоненты вектора $\mathbf{v}$ в системе координат Ox_i , $i = \overline{1,3}$.

При выводе выражений для аэродинамического момента не учитывалось взаимное затенение корпуса КА и солнечных батарей от набегающего аэродинамического потока. Такое упрощение оправдано, поскольку для большинства движений рассматриваемого КА относительная продолжительность отрезков времени, на которых указанное затенение существенно, невелика.

Под магнитным моментом $\mathbf{M}_m$ действующим на КА, в данной работе подразумевается механический момент создаваемый взаимодействием электромагнитных исполнительных органов системы управления угловым движением КА с МПЗ. Такой момент имеет вид [156]

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{L} \times \mathbf{B}, \quad (1.7)$$

где $\mathbf{L}$ – магнитный момент, создаваемый системой электромагнитных

исполнительных органов КА, $\mathbf{B}$ – магнитная индукция МПЗ в точке O .

При численном моделировании системы уравнений движения КА в работе используются следующие значения его геометрических и массово-инерционных характеристик: $I_1 = 2600 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_2 = 11100 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_3 = 10900 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $m = 6440 \text{ кг}$, $R_c = 1.3 \text{ м}$, $L_c = 5.0 \text{ м}$, $S_b = 33.0 \text{ м}^2$, $x_b = -1.0 \text{ м}$, $x_c = 0.3 \text{ м}$. Если в работе рассматривается КА как осесимметричное твердое тело, то принимается, что $I_2 = I_3 = 11000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, значения остальных его характеристик остаются без изменений. При моделировании орбитального движения значение баллистического коэффициента КА всегда принималось равным $c = 0.0017 \text{ м}^2 / \text{кг}$.

Описанную выше подсистему уравнений углового движения КА дополняют кинематические соотношения, представленные либо уравнениями Пуассона для строк $\mathbf{w}_i$, $i = \overline{1,3}$ матрицы W и уравнением, учитывающим ее ортогональность ($\mathbf{w}_i$ – орты осей системы $O_E Y_i$)

$$\frac{\tilde{d} \mathbf{w}_1}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}_1 = \omega_E \mathbf{w}_2, \quad \frac{\tilde{d} \mathbf{w}_2}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}_2 = -\omega_E \mathbf{w}_1, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2,$$

либо уравнениями для компонентов кватерниона Q ориентации системы Ox_i относительно системы $O_E Y_i$, $i = \overline{1,3}$,

$$\begin{aligned} 2\dot{q}_0 &= -q_1\omega_1 - q_2\omega_2 - q_3(\omega_3 - \omega_E), \\ 2\dot{q}_1 &= q_0\omega_1 + q_2(\omega_3 + \omega_E) - q_3\omega_2, \\ 2\dot{q}_2 &= q_0\omega_2 + q_3\omega_1 - q_1(\omega_3 + \omega_E), \\ 2\dot{q}_3 &= q_0(\omega_3 - \omega_E) + q_1\omega_2 - q_2\omega_1. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В каждой из глав данной работы в зависимости от рассматриваемой задачи указаны используемая форма записи уравнений углового движения КА (1.4) и кинематические соотношения (1.8) или (1.9).

1.4 Начальные условия орбитального движения

При численном моделировании уравнений движения рассматриваются несколько вариантов орбит движения центра масс КА. Каждая из рассмотренных орбит задается начальными условиями движения центра масс в восходящем узле. Соответствующие им решения уравнений орбитального движения назовем «Орбита I», «Орбита II» и т.д. Ниже приведены начальные условия на конкретный момент времени для каждой из орбит, используемых в данной работе. Там же приведены параметры модели атмосферы, используемые при расчетах движения центра масс и углового движения КА для соответствующей орбиты.

Орбита I (a). В момент 07:13:07 UTC 05.05.2013 элементы орбиты составляли: высота в апогее 575.2 км, высота в перигее 546.8 км, наклонение 64.87° , аргумент широты перигея -124.65° , долгота восходящего узла (отсчитывается от точки весеннего равноденствия эпохи даты) -16.73° . Параметры модели атмосферы:

$$F_{10.7} = 137 \cdot 10^{-22} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}, F_{81} = 117 \cdot 10^{-22} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}, K_p = 2.3333.$$

Орбита I (b). В момент 07:13:07 UTC 21.12.2013 элементы орбиты составляли: высота в апогее 575.2 км, высота в перигее 546.8 км, наклонение 64.87° , аргумент широты перигея -124.65° , долгота восходящего узла -150.03° . Параметры модели атмосферы:

$$F_{10.7} = 137 \cdot 10^{-22} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}, F_{81} = 117 \cdot 10^{-22} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}, K_p = 2.3333.$$

Орбита II. В момент 09:10:34 UTC 21.09.2007 элементы орбиты составляли: высота в апогее 450.0 км, высота в перигее 400.0 км, наклонение 63.0° , аргумент широты перигея 53.5° , долгота восходящего узла 164.0° . Параметры модели атмосферы:

$$F_{10.7} = 150 \cdot 10^{-22} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}, F_{81} = 150 \cdot 10^{-22} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}, K_p = 2.6667.$$

При численном моделировании начальные условия уравнений углового движения КА задавались в тот же момент времени, что и начальные условия

принятой орбиты. Этот момент служит началом отсчета времени – точкой $t = 0$.

1.5 Расчет микроускорений

Квазистатические (низкочастотные) микроускорения на борту КА вызываются в основном четырьмя причинами: 1) движением КА относительно центра масс как твердого тела, 2) градиентом гравитационного поля, 3) воздействием на КА сил негравитационной природы, 4) действием силы, создаваемой органами управления. Если КА совершает неуправляемое движение или для управления им используются гироскопические или магнитные исполнительные органы, то последняя из перечисленных причин исчезает. Вывод формулы микроускорения основан на следующем определении. Пусть КА представляет собой твердое тело, и точка P жестко связана с его корпусом.

Определение [6]: Микроускорением $\mathbf{b}$ в точке P называется разность между напряженностью гравитационного поля в этой точке и абсолютным ускорением последней.

Роль вектора $\mathbf{b}$ в орбитальных экспериментах аналогична роли ускорения свободного падения в экспериментах на поверхности Земли. В частности, если в точке P закрепить пробное тело с исчезающе малой массой m_p , то реакция, действующая на это тело со стороны КА, будет равна $-m_p \mathbf{b}$. Движение центра масс КА по околоземной орбите описывается уравнением

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu_E}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad r = |\mathbf{r}|,$$

где $\mathbf{F}$ – главный вектор негравитационных сил, действующих на корпус КА, m – масса КА. Обозначим как $\mathbf{p}$ радиус-вектор, определяющий положение произвольной точки P жестко связанной с корпусом КА относительно его центра масс. Тогда $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{p}$ – радиус-вектор точки P относительно центра Земли. По определению микроускорение в точке P рассчитывается как

$$\mathbf{b} = -\frac{\mu_E}{\tilde{r}^3} \tilde{\mathbf{r}} - \frac{d^2 \tilde{\mathbf{r}}}{dt^2}.$$

С учетом соотношения

$$\frac{d^2 \tilde{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -\frac{\mu_E}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{F}}{m} + \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2}$$

получим

$$\mathbf{b} = -\mu_E \left(\frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) - \frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2}.$$

Поскольку корпус КА рассматривается как твердое тело, то

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}),$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость КА. С учетом соотношения $|\tilde{\mathbf{r}}|^2 = |\mathbf{r}|^2 + |\boldsymbol{\rho}|^2 + 2(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho})$ можно записать, что

$$\frac{1}{\tilde{r}^3} = r^{-3} \left(1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho})}{r^2} + \frac{\rho^2}{r^2} \right)^{-\frac{3}{2}}, \quad \tilde{r} = |\tilde{\mathbf{r}}|, \quad \rho = |\boldsymbol{\rho}|.$$

Тогда, раскладывая функцию $1/\tilde{r}^3$ в ряд по степеням ρ/r и учитывая, что $\rho \ll r$ справедлива формула

$$\frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}^3} = \frac{\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}}{r^3} - \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho})}{r^5}.$$

С помощью последних соотношений выражение для $\mathbf{b}$ можно записать как [6]:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_r + \mathbf{b}_g + \mathbf{b}_a,$$

(1.10)

$$\mathbf{b}_r = \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{b}_g = \frac{\mu_E}{r^3} \left(3 \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} \right), \quad \mathbf{b}_a = -\frac{\mathbf{F}}{m}.$$

Слагаемые $\mathbf{b}_r$, $\mathbf{b}_g$, $\mathbf{b}_a$ отвечают всем четырем указанным выше причинам возникновения микроускорений. Видно, что для составляющих микроускорения $\mathbf{b}_r$, $\mathbf{b}_g$, вызванных первыми двумя причинами, есть простые расчетные формулы, чтобы ими воспользоваться достаточно знать только орбиту и угловое движение КА. К третьему слагаемому $\mathbf{b}_a$ относятся разного рода управляющие воздействия, воздействия из-за движения внутренних частей КА,

аэродинамическое сопротивление, световое давление, влияние МПЗ и т.п. Вывод явной формулы для величины $\mathbf{F} / m$ требует задания конкретных механических моделей, таких как модель взаимодействия КА с внешней средой, модель работы его органов управления и т.п. В данной работе из сил негравитационной природы, действующих на КА, учитывается только сила аэродинамического сопротивления, как вносящая наибольший вклад в микроускорения на низких (<600 км), близких к круговым, орбитах КА. Для этой силы примем следующее аппроксимирующее выражение $\mathbf{F} / m = -c\rho_a \mathbf{v} \mathbf{v}$, таким образом получаем, что

$$\mathbf{b}_a = c\rho_a \mathbf{v} \mathbf{v}.$$

Допущения, сделанные при выводе формулы (1.6) аэродинамического момента, позволяют выписать явное выражение для баллистического коэффициента КА, входящего в указанное выше уравнение. Этот коэффициент имеет вид $c = S_v / m$, где S_v – площадь геометрической фигуры, являющейся проекцией внешней оболочки корпуса КА на плоскость Π_v . В данном случае

$$v S_v = \pi R_c^2 |v_1| + S_b |v_2| + 2R_c L_c \sqrt{v_2^2 + v_3^2},$$

и формула для $\mathbf{b}_a$ принимает вид

$$\mathbf{b}_a = \rho_a \left(\frac{\pi R_c^2}{m} |v_1| + \frac{S_b}{m} |v_2| + \frac{2R_c L_c}{m} \sqrt{v_2^2 + v_3^2} \right) \mathbf{v}. \quad (1.11)$$

При выводе выражений для баллистического коэффициента также, как и для аэродинамического момента не учитывалось взаимное затенение корпуса КА и солнечных батарей от набегающего потока.

Формула (1.10) выведена для общего случая без каких-либо частотных ограничений. Однако если КА имеет большие инерционные характеристики и его угловое движение рассчитывается как движение твердого тела (такое движение обычно очень медленное), то формула (1.10) дает именно квазистатическое микроускорение.

При численных расчетах микроускорений по формулам (1.10), (1.11) в данной работе принималось, что в системе $Ox_1x_2x_3$ положение точки P

определяется радиус-вектором $\mathbf{p} = (-1.0 \text{ м}, 0.7 \text{ м}, 0.5 \text{ м})^T$ (рис. 1.1).

Подразумевается, что эта точка находится на внутренней стенке рабочего отсека КА, на максимальном удалении от центра масс. Вблизи этой точки возможна установка научной аппаратуры.

Приведем некоторые числовые оценки, характеризующие один из наиболее подходящих для исследований в области микрогравитации режимов углового движения КА – режим орбитальной ориентации. Ниже в данном разделе компоненты векторов и координаты точек указываются в системе $OX_1X_2X_3$.

Будем считать, что орбита КА круговая и неизменна в абсолютном пространстве, и что КА неподвижен в орбитальной системе координат. Тогда

$$\mathbf{r} = r\mathbf{E}_3, \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{E}_1 + v_2\mathbf{E}_2, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_0\mathbf{E}_2, \quad (1.12)$$

$$v_1 = r(\omega_0 - \omega_E \cos i), \quad v_2 = r\omega_E \sin i \cos u, \quad \omega_0 = \sqrt{\mu_E / r^3}.$$

Здесь r – радиус круговой орбиты КА, ω_0 – среднее движение КА (орбитальная частота), $u = \omega_0 t + \text{const}$. Для такого КА, введя обозначения $\mathbf{p} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)^T$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$, формулу (1.12) в скалярном виде можно записать так:

$$b_1 = c\rho_a v v_1, \quad b_2 = -\omega_0^2 \rho_2 + c\rho_a v v_2, \quad b_3 = 3\omega_0^2 \rho_3,$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = r\sqrt{(\omega_0 - \omega_E \cos i)^2 + (\omega_E \sin i \cos u)^2}.$$

Для КА на круговой орбите с высотой около 400 км и наклонением $i = 63^\circ$ имеют место соотношения $c\rho_a v^2 \approx 10^{-6} \text{ м/с}^2$, $\omega_0 = 0.001138 \text{ с}^{-1}$, $\omega_0^2 \approx 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-2}$, $|v_2|/v_1 < 0.06$. Если взять $\mathbf{p} = (0, 0, 2.5 \text{ м})^T$, то получим $b_1 \approx 10^{-6} \text{ м/с}^2$, $|b_2| < 0.06 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$, $b_3 = 9.7 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$. Компонента b_3 постоянна во времени, компонента b_1 меняется, но сохраняет знак, компонента b_2 меняет знак.

Для задач космического материаловедения микроускорение с модулем 10^{-5} м/с^2 вполне приемлемо, если его компоненты в системе координат технологической установки меняются в достаточно узких пределах. Требования к временным вариациям компонент микроускорения удобно сформулировать в

терминах спектрального анализа. Эти вариации можно представить в виде суммы нескольких гармоник. Предельно допустимые значения амплитуд таких гармоник зависят от их частоты (некоторые данные о частотных свойствах космических экспериментов по росту кристаллов приведены в [29 – 32]). Вообще говоря, каждый космический эксперимент имеет свою собственную амплитудно-частотную характеристику предельно допустимых микроускорений, однако для экспериментов по росту кристаллов такие характеристики более или менее одинаковы. В настоящее время к ним выработаны достаточно конкретные и универсальные требования. Они сводятся к тому, что в диапазоне частот более 0.0001 Гц предельно допустимые значения амплитуд возрастают вместе с частотой. Самой низкой и в этом смысле самой опасной из реально наблюдаемых частот является орбитальная частота (значению $\omega_0 = 0.001138 \text{ с}^{-1}$ отвечает циклическая частота 0.000181 Гц). В рассмотренном примере она ярко выражена в компоненте b_2 , поскольку (ср. (1.12)) $v_2 \sim \cos u$, и присутствует в компоненте b_1 из-за изменения плотности атмосферы вдоль орбиты. Гармоники с частотами более 0.01 Гц, как правило, уже безопасны.

В рассмотренном выше примере достигнуты весьма благоприятные условия для проведения космических экспериментов по уровню микроускорений. Эти условия гораздо лучше условий, имевших место в неуправляемом угловом движении КА [33 – 39] и в режиме пассивной гравитационной ориентации [6, 157, 158]. В наиболее близком к рассмотренному примеру режиме пассивной гравитационной ориентации микроускорения содержат заметные колебания с опасными частотами 0.00018 – 0.001 Гц. Эти колебания – следствие возмущенного движения КА, вызванного дестабилизирующим действием аэродинамического момента, эллиптичностью орбиты и т. п. причинами [154, 159]. Чтобы уменьшить возмущенное движение, КА следует снабдить средствами трехосной орбитальной стабилизации. Ниже исследовано применение для этой цели электромеханических (гиросистема) и электромагнитных исполнительных органов.

1.6 Схема проведения спектрального анализа данных

Основные приемы спектрального анализа, используемого в данной работе, изложим на следующем примере. Более подробно эти приемы описаны в [149]. Пусть x_n , $n = \overline{1, N}$ – значения какой-либо переменной $x(t)$ исследуемого решения в узлах равномерной временной сетки $\{t_n\}$: $x_n = x(t_n)$, шаг сетки обозначим как $h = t_{n+1} - t_n$. Периодограммой Шустера называется функция $I(f)$, рассматриваемая на отрезке $0 \leq f \leq F = (2h)^{-1}$, и определенная соотношениями

$$I(f) = \left\{ \sum_{n=1}^N [x_n - x_*] \cos(2\pi f t_n) \right\}^2 + \left\{ \sum_{n=1}^N [x_n - x_*] \sin(2\pi f t_n) \right\}^2, \quad x_* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n.$$

Здесь f – пробная частота, F – частота Найквиста. Если моменты времени t_n выражены в секундах, то единицы измерения f и F – герцы. Использование периодограммы основано на следующем ее свойстве. Предположим, что исследуемая функция имеет вид

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^M \left[\alpha_m \cos(2\pi f_m^\circ t) + \beta_m \sin(2\pi f_m^\circ t) \right],$$

где α_0 и α_m , β_m , $m = \overline{1, M}$ – постоянные параметры, все $f_m^\circ > 0$ и среди них нет одинаковых. Составим выражение

$$I_1(f) = \left\{ \sum_{n=1}^N [x(t_n) - \alpha_0] \cos(2\pi f t_n) \right\}^2 + \left\{ \sum_{n=1}^N [x(t_n) - \alpha_0] \sin(2\pi f t_n) \right\}^2.$$

Его можно преобразовать к виду

$$I_1(f) = \left(\frac{N}{2} \right)^2 \sum_{m=1}^M (\alpha_m^2 + \beta_m^2) \left[W(f - f_m^\circ) + W(f + f_m^\circ) \right] + \Delta I_1(f),$$

$$N^2 W(f) = \left[\sum_{n=1}^N \cos(2\pi f t_n) \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^N \sin(2\pi f t_n) \right]^2 = \frac{\sin^2(\pi N f h)}{\sin^2(\pi f h)},$$

$$\begin{aligned} \Delta I_1(f) = & \sum_{m < l} \sum_j \left\{ A_j \cos \left(2\pi \left[\Omega_j t_m + \Omega'_j t_l + f(t_l - t_m) \right] \right) + \right. \\ & \left. + B_j \sin \left(2\pi \left[\Omega_j t_m + \Omega'_j t_l + f(t_l - t_m) \right] \right) \right\}. \end{aligned}$$

В выражении для $\Delta I_1(f)$ частоты Ω_j и Ω'_j принадлежат множеству чисел $\{\pm f_1^\circ, \pm f_2^\circ, \dots, \pm f_M^\circ\}$, коэффициенты A_j и B_j выражаются через α_m и β_m , $m = \overline{1, M}$.

Функция $W(f)$ называется функцией окна [149]. Она – четная, периодическая с периодом $2F$ и удовлетворяет соотношениям $0 \leq W(f) \leq 1$, $W(0) = 1$. Ее наименьший положительный нуль равен $(Nh)^{-1}$. Значимые максимумы (пики) функции окна равны 1 и достигаются в точках $f = 2Fl$, $l = \overline{0, \infty}$. Вне малых окрестностей этих точек $W(f) < 0.01$. С увеличением N ширина пиков этой функции сужается. В силу четности и периодичности функция окна полностью определяется своими значениями на отрезке $0 \leq f \leq F$.

Для $\Delta I_1(f)$ не удастся найти простых эффективных оценок, но при большом N вкладом этого слагаемого в значения функции $I_1(f)$ вблизи точек ее значимых максимумов можно пренебречь и принять

$$\tilde{I}_1(f) = \frac{N^2}{4} \sum_{m=1}^M (\alpha_m^2 + \beta_m^2) [W(f - f_m^\circ) + W(f + f_m^\circ)].$$

Таким образом, значимые максимумы функций $I_1(f)$ и $\tilde{I}_1(f)$ весьма близки. Отсюда, учитывая вид окна $W(f)$, можно найти точки этих максимумов – они определяются соотношениями $|f \pm f_m^\circ| = 2Fl$, $l = \overline{0, \infty}$. Если $f_m^\circ < F$, то периодограмму $I_1(f)$ достаточно исследовать на интервале $0 < f < F$. На нем ее значимые максимумы достигаются в малой окрестности точек f_m° .

Вернемся к периодограмме $I(f)$. В случае исследуемых решений уравнений при $\alpha_0 \approx x_*$, значимые максимумы периодограммы достигаются в точках $f_m^* \approx f_m^\circ$, и $\alpha_m^2 + \beta_m^2 \approx 4N^{-2}I(f_m^*)$, $m = \overline{1, M}$. Точность выписанных соотношений увеличивается с ростом N . Таким образом, знание максимумов периодограммы позволяет получить оценки частот и амплитуд гармонических составляющих функции $x(t)$. Ниже вместо графиков периодограммы приводятся

графики амплитудного спектра $A(f) = 2N^{-1}\sqrt{I(f)}$. Функция $A(f)$ удобна тем, что ее максимальные значения являются оценками амплитуд соответствующих гармоник. Однако ее значимые максимумы выражены менее наглядно значимых максимумов периодограммы.

Описанная выше схема проведения спектрального анализа данных использовалась при расчетах всех спектральных характеристик в данной работе, значения величин h и N , для каждого конкретного случая приведены в соответствующей главе работы.

Глава 2. Исследование устойчивости установившегося ориентированного движения космического аппарата

В данной главе описывается методика исследования устойчивости установившегося ориентированного движения КА. Применение предлагаемой методики рассматривается на примере хорошо известной задачи исследования углового движения осесимметричного КА с постоянным магнитом под действием механического момента, создаваемого влиянием на магнит магнитного поля Земли (МПЗ).

2.1 Уравнения углового движения космического аппарата

Космический аппарат считаем осесимметричным твердым телом, центр масс которого движется по геоцентрической орбите. На нем установлен магнит, создающий постоянный дипольный момент, направленный по оси симметрии КА. Для записи уравнений движения КА и представления полученных результатов используется гринвичская система координат $O_E Y_1 Y_2 Y_3$. В этой главе компоненты всех векторов относятся к системе $O_E Y_1 Y_2 Y_3$.

Уравнения движения КА состоят из двух подсистем (см. п. 1.3). Подсистема уравнений углового движения образована уравнениями, описывающими теорему об изменении кинетического момента КА в движении

относительно центра масс (1.4) и уравнениями Пуассона для орта оси симметрии КА. В уравнениях кинетического момента учитываются гравитационный момент $\mathbf{M}_g$ (1.5), модельный демпфирующий момент и механический момент $\mathbf{M}_m$ (1.7), обусловленный взаимодействием магнита КА с МПЗ.

Подсистему уравнений углового движения запишем в виде

$$\dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\omega}_E \times \mathbf{\Omega} + k_{\Omega} \mathbf{\Omega} = \nu(1 - \lambda)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) + l_0(\mathbf{n} \times \mathbf{B}), \quad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{n}} + \mathbf{\omega}_E \times \mathbf{n} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{n}, \quad \nu = 3\mu_E / |\mathbf{r}|^5, \quad \lambda = I_1 / I_2.$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени t , причем векторы дифференцируются относительно системы $O_E Y_1 Y_2 Y_3$, I_1 и I_2 – полярный и экваториальный главные центральные моменты инерции КА, $I_2 \mathbf{\Omega}$ – кинетический момент КА в его движении относительно центра масс, $\mathbf{n}$ – орт оси симметрии КА, $I_2 l_0$ – дипольный момент магнита КА, k_{Ω} – коэффициент демпфирования. Компоненты $\mathbf{B}$ рассчитываются согласно модели IGRF. Полагаем, что $l_0 |\mathbf{B}| \gg \nu(1 - \lambda) > 0$, т.е. создаваемый магнитом механический момент влияет на движение КА намного сильнее гравитационного момента.

Ниже рассматриваются движения КА в режиме одноосной магнитной ориентации [11 – 13, 15]. В этом режиме ось симметрии КА совершает малые колебания относительно вектора магнитной индукции МПЗ.

2.2 Поиск начальных условий ориентированного движения

Сперва построим установившееся ориентированное движение КА в режиме одноосной магнитной ориентации, которое в дальнейшем будем исследовать. Построение сводится к поиску таких начальных условий системы (2.1) в случаях $k_{\Omega} = 0$ и $k_{\Omega} > 0$, при которых ориентированное движение КА будет существовать достаточно долго.

При $k_{\Omega} > 0$ начальные условия движения КА в режиме одноосной

магнитной ориентации $\mathbf{\Omega}(0)$ и $\mathbf{n}(0)$ можно найти методом установления (представляющий интерес режим должен быть асимптотически устойчив), но можно выбирать начальные условия уравнений (2.1) путем минимизации функционала

$$\Phi = \sum_{s=0}^S |\mathbf{B}(s\tau) \times \mathbf{n}(s\tau)|^2. \quad (2.2)$$

Минимизация такого функционала позволяет построить режим одноосной магнитной ориентации и в случае $k_{\Omega} = 0$. Однако при отсутствии демпфирования время существования ориентированного движения будет сравнительно невелико.

При построении ориентированного движения КА в программе численного интегрирования были приняты следующие значения параметров уравнений движения. Массово-инерционные характеристики и баллистический коэффициент КА приведены в п. 1.3, значение $\lambda = 0.236$. Параметр l_0 варьировался в пределах от 2 до 20 А/кг, параметр k_{Ω} принимал значения: 0, 0.0001 с^{-1} , 0.00015 с^{-1} и 0.0002 с^{-1} . В данной главе при численном интегрировании уравнений движения центра масс КА в качестве начальных условий использовались параметры **Орбиты I (а)**.

Так как в ориентированном движении функция $|\mathbf{B}(t) \times \mathbf{n}(t)|$ должна быть малой, минимизация Φ по начальным условиям решения системы (2.1) проводилась методом Гаусса–Ньютона с учетом ограничения $|\mathbf{n}(0)| = 1$. На первом этапе минимизации этот метод использовался в варианте Левенберга-Маркдвардта [150]. Для расчета частных производных решения по начальным условиям интегрировались соответствующие уравнения в вариациях. Рассматривались два варианта минимизации Φ – с демпфированием и без него. В варианте с демпфированием $S = 288$, $\tau = 5$ мин ($S\tau = 1$ сут), без демпфирования – $S = 1152$, $\tau = 5$ мин ($S\tau = 4$ сут). Первым приближением искомых начальных условий служили значения $\mathbf{\Omega}(0) = 0$, $\mathbf{n}(0) = \mathbf{B}(0)/|\mathbf{B}(0)|$.

Такие начальные условия использовались и в методе установления. В варианте с демпфированием продолжение экстремали функционала (2.2) на интервал $t > S\tau$ практически совпадало с установившемся решением.

Примеры расчетов решений уравнений (2.1) с начальными условиями экстремалей функционала (2.2) приведены на рис. 2.1 – 2.3. Решения вычислены на отрезке времени длиной 20 суток при $l_0 = 4$ А/кг. Решение на рис. 2.1, 2.2 получено в случае $k_\Omega = 0.00015$ с⁻¹. Здесь изображены графики зависимости от времени компонент векторов $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ и угла $\tilde{\gamma} = \arccos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})$. Графики представлены на двух отрезках времени: $0 \leq t \leq 3$ сут и $17 \leq t \leq 20$ сут, они иллюстрируют начало и окончание вычисленного решения. Судя по графикам, это решение можно считать установившимся и описывающим движение КА в режиме одноосной магнитной ориентации. На графиках Ω_1 и Ω_2 видны колебания большой амплитуды с периодом 1 сут и колебания малой амплитуды, период которых – примерно половина орбитального периода.

Решение на рис. 2.3 получено при $k_\Omega = 0$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$ (при $k_\Omega = 0$ система (2.1) имеет первый интеграл $\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} = \text{const}$). Здесь приведены графики компонент вектора $\mathbf{\Omega}$ и угла $\tilde{\gamma}$. Это решение первые несколько суток похоже на установившееся, и описывает движение КА в режиме одноосной магнитной ориентации, но затем оно начинает разрушаться. Решение на рис. 2.3 интересно сравнить с решением, полученным с использованием модели МПЗ в виде прямого диполя. Такое решение приведено на рис. 2.4. Оно также найдено при $k_\Omega = 0$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$ и $l_0 = 4$ А/кг. Графики компонент вектора $\mathbf{\Omega}$ и угла $\tilde{\gamma}$ представлены на отрезках времени $0 \leq t \leq 3$ сут и $37 \leq t \leq 40$ сут, которые иллюстрируют начало движения и его удаленный от начала участок. Здесь нет признаков разрушения движения.

2.3. Спектральный анализ ориентированных движений

Решение уравнений (2.1) на рис. 2.1, 2.2 выглядит как условно-периодическое. Его частоты были найдены с помощью спектрального анализа, выполнявшегося по схеме, представленной в п. 1.6. Во всех рассмотренных ниже примерах шаг сетки $h = 16$ с, частота Найквиста $F = 0.03125$ Гц.

Таблица 1.

№	Частоты		Амплитуды			
	f	Интерпретация	$A_{\Omega 1}$	$A_{\Omega 2}$	$A_{\Omega 3}$	A_{γ}
	10^{-4} Гц		10^{-3} °/с			град.
1	0.1145	f_E	99	103	5.44	0.142
2	0.3435	$3f_E$	12	14	3.99	0.232
3	1.506	$f_0 - 2f_E$	11	12	4.71	0.184
4	1.621	$f_0 - f_E$	1.75	8.11	0.68	0.312
5	1.850	$f_0 + f_E$	3.06	10	3.85	0.106
6	1.964	$f_0 + 2f_E$	3.84	2.64	5.84	0.076
7	3.356	$2f_0 - f_E$	40	32	9.36	0.139
8	3.470	$2f_0$	13	12	20	0.736
9	5.091	$3f_0 - f_E$	5.81	8.65	4.56	0.071
10	6.826	$4f_0 - f_E$	13	17	1.40	0.043
11	6.940	$4f_0$	7.66	5.45	5.24	0.166
12	8.675	$5f_0$	0.28	0.92	2.87	0.056
13	10.30	$6f_0 - f_E$	6.48	5.25	2.27	0.044
14	10.41	$6f_0$	6.05	1.67	2.06	0.139
15	12.15	$7f_0$	1.21	1.44	2.05	0.043
16	13.76	$8f_0 - f_E$	2.24	2.50	1.38	0.026
17	13.88	$8f_0$	3.81	1.01	1.65	0.180

Для сетки $\{t_n\}_{n=1}^N$ с шагом h и при $N = 6000$, фрагменты графика функции окна $W(f)$ изображены на рис. 2.5. На рис. 2.6 – 2.8 черным цветом (кое-где черные линии расположены в точности под линиями красными и поэтому не видны) изображены амплитудные спектры $A_{\Omega_i}(f)$ переменных $\Omega_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, графики которых приведены на рис. 2.1. На рис. 2.9 приведен амплитудный спектр $A_\gamma(f)$ угла $\tilde{\gamma}$ представленного на рис. 2.2. Все амплитудные спектры на рис. 2.6 – 2.9 представлены в диапазоне частот от 0 до $F = 0.0015$ Гц. Выше в табл. 1 приведены частоты и амплитуды наиболее значимых гармоник. Здесь $f_E = \omega_E / 2\pi$ – частота вращения Земли, $f_0 = \omega_0 / 2\pi$ – орбитальная частота (ω_0 – среднее движение центра масс КА). Номера частот в табл. 1 соответствуют номерам, указанным на рис. 2.6 – 2.9. Наиболее значимый вклад в установившееся движение вносят гармоники с частотами f_E и $2f_0 - f_E$. Присутствие f_E объясняется тем, что переменные уравнений (2.1) относятся к гринвичской системе координат, частота $2f_0 - f_E$ является доминирующей в гринвичских компонентах векторной функции $\mathbf{B}(t)$ уравнений (2.1). В модели прямого диполя компоненты этого вектора в инерциальной системе координат меняются с частотой $2f_0$ [12].

Для сравнения на рис. 2.6 – 2.8 красным цветом показаны амплитудные спектры переменных $\Omega_i(t)$, $i = \overline{1,3}$ установившегося решения уравнений (2.1), полученного при тех же условиях, что и решение, приведенное на рис. 2.1, только в качестве модели МПЗ вместо IGRF использовалась модель прямого диполя.

2.4 Аппроксимация ориентированного движения космического аппарата

Анализ рис. 2.1 – 2.3 и 2.6 – 2.9 показывает, что установившийся режим магнитной ориентации КА похож на условно-периодическое движение с базисными частотами f_0 и $f_E \approx f_0 / 16$. Основываясь на этом свойстве и

учитывая соотношение $f_0 \gg f_E$, построим аппроксимацию такого режима последовательностью периодических движений с периодом $1/f_0$, отличающихся положением орбиты относительно МПЗ.

На каждом орбитальном витке (между последовательными прохождениями восходящего узла орбиты) построим аппроксимирующее периодическое движение. При построении этого движения гринвичскую систему координат примем инерциальной, зафиксировав ее положение в абсолютном пространстве на момент прохождения КА восходящего узла орбиты на данном витке. Иными словами, зафиксируем соответствующее среднее звездное время. Орбиту в «замороженной» гринвичской системе примем кеплеровой эллиптической. Элементы этой орбиты вычисляются по фазовому вектору реальной орбиты в начальном восходящем узле. Таким образом, от витка к витку долгота восходящего узла орбиты в «замороженной» гринвичской системе координат меняется, меняется и положение орбиты относительно МПЗ, но внутри витка эти долгота и положение относительно МПЗ остаются неизменными. Уравнения углового движения КА возьмем в виде (2.1), положив в них $\omega_E = 0$ и приняв в формулах для расчета координат и компонент скорости центра масс в «замороженной» гринвичской системе формулы кеплерова движения. Получившуюся систему уравнений обозначим (2.1'). Время входит в эту систему периодически с орбитальным периодом T , поэтому можно поставить задачу об отыскании ее периодических решений. Интерес представляет такое периодическое решение, которое можно будет использовать как аппроксимацию установившегося решения исходной системы (2.1) на данном витке.

Построение периодического решения системы (2.1') сводится к решению для этой системы периодической краевой задачи

$$\mathbf{\Omega}(t_0) = \mathbf{\Omega}(t_0 + T), \quad \mathbf{n}(t_0) = \mathbf{n}(t_0 + T), \quad |\mathbf{n}(t_0)| = 1. \quad (2.3)$$

Здесь t_0 – момент прохождения восходящего узла орбиты на витке аппроксимации. Задача (2.1'), (2.3) решается методом пристрелки. Краевые условия (2.3) рассматриваются как уравнения для определения неизвестных

начальных условий $\Omega(t_0)$, $\mathbf{n}(t_0)$. Первым приближением начальных условий периодического решения служат значения фазовых переменных аппроксимируемого решения в точке t_0 . Можно также использовать начальное приближение $\Omega(t_0) = 0$, $\mathbf{n}(t_0) = \mathbf{B}(t_0)/|\mathbf{B}(t_0)|$.

На рис. 2.10 – 2.13 приведены результаты аппроксимации установившегося решения уравнений (1), рассмотренного в п. 2.2 (рис. 2.1, 2.2). Здесь представлены графики зависимости от времени переменных Ω_i , n_i и угла $\tilde{\gamma}$. Графики аппроксимируемого решения – черные, графики аппроксимирующего решения – красные. На рис. 2.10, 2.11 аппроксимация выполнена на интервале длиной 3 суток, на рис. 2.12 – на интервале решения краевой задачи (2.1'), (2.3). В принципе, аппроксимацию периодическими решениями можно построить на весьма продолжительном интервале времени, длина которого зависит от наличия подходящей орбиты КА. На рис. 2.10, 2.11 красные графики в малых окрестностях моментов прохождения восходящих узлов орбиты налегают друг на друга (кеплеров период несколько больше драконического), но при выбранном масштабе графиков на рис. 2.10, 2.11 налегания практически не заметны. На рис. 2.13 показан стык решений задачи (2.1'), (2.3) на соседних витках (красные линии) на фоне аппроксимируемого решения (черные линии). Строго говоря, в аппроксимирующую последовательность включается только отрезок периодического решения, расположенный между начальным и конечным на данном витке восходящими узлами. Отрезок решения за конечным восходящим узлом отбрасывается.

Построенная аппроксимация оказалась достаточно точной. Это обусловлено двумя обстоятельствами. Во-первых, кеплерова аппроксимация орбиты в данной задаче приемлема для построения углового движения КА на орбитальном витке. Во-вторых, МПЗ в «замороженной» гринвичской системе $O_E Y_1 Y_2 Y_3$ в течение витка меняется сравнительно мало, поскольку оно близко к полю диполя, момент которого расположен вблизи точки O_E и составляет с осью $-O_E Y_3$ малый угол ($\sim 12^\circ$). Поле прямого диполя в таком случае вообще не

менялось бы.

Последовательность периодических решений уравнений (2.1') позволяет сформировать идеальный режим одноосной ориентации КА в случае $k_{\Omega} = 0$, $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$. Этот режим обеспечивает те же ошибки ориентации как при $k_{\Omega} > 0$, но не может быть реализован в действительности на продолжительном отрезке времени (см. ниже). Графики переменных $\Omega_i(t)$, $n_i(t)$ и угла $\tilde{\gamma}(t)$ в этом режиме изображены красными линиями на рис. 2.14, 2.15 на фоне черных графиков, иллюстрирующих решение уравнений (2.1) при $k_{\Omega} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$ из п. 2.2 (рис. 2.3).

На рис. 2.16 – 2.23 показаны амплитудные спектры переменных $\Omega_i(t)$ и угла $\tilde{\gamma}(t)$ в решениях уравнений (2.1) и в аппроксимирующих последовательностях периодических решений. Графики построены для решений, рассмотренных выше. Рис. 2.16 – 2.19 отвечают случаю $k_{\Omega} = 0.00015 \text{ с}^{-1}$, рис. 2.20 – 2.23 – случаю $k_{\Omega} = 0$, $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$. Амплитудные спектры аппроксимируемого решения изображены черными линиями, аппроксимирующих функций – красными линиями. Кое-где красные линии налегают на черные, поэтому черные не видны. Спектры функций $\Omega_i(t)$ практически совпадают. Спектры угла $\tilde{\gamma}(t)$ на рис. 2.19 отличаются только на отрезке $0 \leq f \leq 0.00015$ Гц, на рис. 2.24 их отличие довольно существенно из-за специфики аппроксимирующей последовательности.

2.5 Периодические движения космического аппарата

Удобство аппроксимации решений уравнений (2.1) последовательностью периодических решений заключается в том, что, последние допускают детальное параметрическое исследование. Построив семейства решений краевой задачи (2.1'), (2.3) для различных значений l_0 , k_{Ω} и долготы Ω_G восходящего узла орбиты в «замороженной» гринвичской системе координат можно в сжатом виде получить достаточно полное представление о решениях уравнений (2.1) на продолжительных интервалах времени, выбрать нужные параметры КА.

Результаты решения задачи (2.1'), (2.3) представлены на рис. 2.24 – 2.31 графиками зависимости начальных условий от параметров l_0 и Ω_G . Графики построены при $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$, $k_\Omega = 0.0001\text{с}^{-1}$, $k_\Omega = 0.00015\text{с}^{-1}$ и $k_\Omega = 0.0002\text{с}^{-1}$. Они изображены соответственно черными, красными, синими и зелеными линиями. В (2.3) принято $t_0 = 0$, элементы используемой в уравнениях (2.1') кеплеровой орбиты (кроме долготы восходящего узла) совпадали с элементами орбиты КА при $t = 0$. Решения найдены методом пристрелки, первое приближение разыскиваемых начальных условий $\boldsymbol{\Omega}(0) = 0$, $\mathbf{n}(0) = \mathbf{V}(0)/|\mathbf{V}(0)|$.

Графики зависимости $\boldsymbol{\Omega}(0)$ и $\mathbf{n}(0)$ от l_0 построены при $\Omega_G = 11.67^\circ$ на трех отрезках: $2 \leq l_0 \leq 6$ (рис. 2.24, 2.25), $6 \leq l_0 \leq 10$ (рис. 2.26, 2.27) и $10 \leq l_0 \leq 20$ (рис. 2.28, 2.29), здесь $[l_0] = \text{А} / \text{кг}$. В случае $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$ решения задачи (2.1'), (2.3) удалось найти не для всех значений l_0 . Лакуны обусловлены резонансами в системе (2.1') и связанным с ними ветвлением периодических решений [7, 11, 12, 15]. Резонансы возникают между изменением вектора $\mathbf{V}$ вдоль орбиты КА и колебаниями орта $\mathbf{n}$ относительно этого вектора.

Графики начальных условий решений задачи (2.1'), (2.3) в функции угла Ω_G построены при $l_0 = 4 \text{ А/кг}$ (рис. 2.30, 2.31). В случае $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$ решения этой задачи удалось найти не для всех значений Ω_G . Причина та же, что и у лакун черных графиков на рис. 2.24 – 2.29 – резонансы в системе (2.1'). Указанные резонансы проявляются не только в системе (2.1'), но в системе (2.1).

Из-за таких резонансов невозможно продолжительное существование режима магнитной ориентации КА при $k_\Omega = 0$. Изменение режима магнитной ориентации в процессе суточного вращения Земли можно приближенно рассматривать как изменение периодического решения системы (2.1') в функции угла Ω_G . Решения задачи (2.1'), (2.3), на которых угол $\tilde{\gamma}_{\max} = \max |\tilde{\gamma}(t)|$ ($0 \leq t \leq T$) мал, образуют однопараметрические семейства с параметром Ω_G . При $k_\Omega > 0$ существует одно такое семейство, и оно непрерывно зависит от Ω_G .

на весьма значительном интервале изменения этого параметра. Интервал охватывает многие сутки полета. Как следствие режим существует продолжительное время. В случае $k_{\Omega} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$ существует достаточно много семейств периодических решений с малым $\tilde{\gamma}_{\max}$ и непрерывных по Ω_G . При каждом Ω_G существует не более одного такого решения. Лакуны – интервалы значений Ω_G , при которых решения задачи (2.1'), (2.3) не обладают малым $\tilde{\gamma}_{\max}$ – весьма малы. Отрезок $0 \leq \Omega_G \leq 2\pi$ на рис. 2.30 содержит две таких лакуны, некоторые их детали показаны на рис. 2.31. При изменении Ω_G в течение суток на некоторых интервалах происходит нарушение непрерывности, и периодическое решение перескакивает с одного семейства на другое. Вблизи границ семейств значения $\tilde{\gamma}_{\max}$ уже не такие малые, поэтому указанные скачки приводят к постепенному нарушению ориентации (рис. 2.3).

Если в уравнениях (2.1) и (2.1') принять модель МПЗ в виде прямого диполя, то резонансов при изменении Ω_G не возникает. В этом случае режим магнитной ориентации существует продолжительное время (рис. 2.4). На рис. 2.32 показаны графики начальных условий решений задачи (2.1'), (2.3) в функции угла Ω_G при $k_{\Omega} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$ и $l_0 = 4$ А/кг для двух вариантов модели МПЗ: IGRF – черные линии, прямой диполь – красные линии. На рис. 2.33 показаны графики начальных условий тех же решений задачи (2.1'), (2.3), пересчитанные в системы координат, которые получаются из гринвичской системы поворотом вокруг оси $O_E Y_3$ на угол Ω_G используемой орбиты КА. В каждой такой системе ось $O_E Y_1$ направлена в восходящий узел используемой орбиты. Графики, полученные с использованием модели IGRF, изображены сплошными линиями. Их цвета указывают на принятые значения k_{Ω} : 0 – черные линии, 0.0001 с^{-1} – красные линии, 0.00015 с^{-1} – синие линии и 0.0002 с^{-1} – зеленые линии. Графики, полученные с использованием модели прямого диполя, показаны пунктиром.

Резонансы в задаче (2.1'), (2.3) проявляются и при $k_\Omega > 0$. Рис. 2.34 содержит графики компонент векторов $\mathbf{\Omega}(t)$ и $\mathbf{n}(t)$, $0 \leq t \leq T$ решений этой задачи, вычисленных при $k_\Omega = 0.00015 \text{ с}^{-1}$, $\Omega_G = 11.67^\circ$ и двух значениях l_0 : 4 А/кг (черные линии) и 4.186 А/кг (красные линии). Амплитуды высокочастотных колебаний Ω_i в «красном» решении значительно выше, чем в «черном». Это объясняется наличием в системе (2.1') резонанса при $l_0 = 4.186 \text{ А/кг}$ (см. рис. 2.24 и 2.27). Однако вследствие указанной выше непрерывности по Ω_G при $k_\Omega > 0$ такие резонансы не приводят к разрушению ориентированного движения.

2.6 Существование периодических движений

Чтобы доказать существование периодических решений, о которых говорилось в п. 2.4 и 2.5, уравнения (2.1') запишем иначе. Используем системы координат $O\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3$ и $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$. Так как орбита КА считается кеплеровой, то $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const}$. Проекция абсолютной угловой скорости системы $O\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3$ на ее собственные оси имеют вид

$$\Phi_1 = \Phi_2 \frac{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{e}'_1}{|(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{e}'_1|}, \quad \Phi_2 = -\frac{\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{e}'_3}{B}, \quad \Phi_3 = -\frac{\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{e}'_2}{B}.$$

Система $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ получают из системы $O\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3$ двумя поворотами. Сначала на угол $\tilde{\alpha}$ вокруг оси $O\tilde{X}_2$, затем на угол $\tilde{\beta}$ вокруг оси $O\tilde{X}_3$, получившейся после первого поворота. Компоненты абсолютной угловой скорости КА в системе $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ обозначим $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Уравнения (2.1') с использованием систем $O\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3$ и $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ можно записать в виде [12, 19]

$$\begin{aligned} \lambda \dot{\omega}_1 &= -k_\Omega \omega_1, \\ \dot{\omega}_2 &= -k_\Omega \omega_2 - \left(\lambda \omega_1 - \omega_2 \operatorname{tg} \tilde{\beta} - \frac{\Phi_1 \cos \tilde{\alpha} - \Phi_3 \sin \tilde{\alpha}}{\cos \tilde{\beta}} \right) \omega_3 - \\ &\quad - l_0 B \sin \tilde{\alpha} - \nu (1 - \lambda) \tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_3 &= -k_\Omega \omega_3 + \left(\lambda \omega_1 - \omega_2 \operatorname{tg} \tilde{\beta} - \frac{\Phi_1 \cos \tilde{\alpha} - \Phi_3 \sin \tilde{\alpha}}{\cos \tilde{\beta}} \right) \omega_2 - \\
&\quad - l_0 B \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\beta} + \nu (1 - \lambda) \tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2, \\
\omega_2 &= (\dot{\tilde{\alpha}} + \Phi_2) \cos \tilde{\beta} - (\Phi_1 \cos \tilde{\alpha} - \Phi_3 \sin \tilde{\alpha}) \sin \tilde{\beta}, \\
\omega_3 &= \dot{\tilde{\beta}} + \Phi_1 \sin \tilde{\alpha} + \Phi_3 \cos \tilde{\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $\tilde{\eta}_i$ – компоненты геоцентрического радиус-вектора точки O в системе $O\tilde{x}_i$, $i = \overline{1,3}$. Так как орбита КА считается кеплеровой эллиптической, время входит в систему (2.4) периодически с орбитальным периодом T . Исследование периодических решений этой системы при $k_\Omega = 0$ и при $k_\Omega > 0$ проводится по-разному. Рассмотрим сначала случай $k_\Omega = 0$. Доказательство существования периодических решений системы (2.4) в этом случае практически идентично доказательству работы [15]. В [15] использована модель МПЗ в виде прямого диполя, и орбита КА принята круговой, но эти упрощения несущественны.

Так как $\omega_1 = \text{const}$ при $k_\Omega = 0$, первое уравнение системы (2.4) рассматривать не будем, а в остальных ее уравнениях ω_1 будем считать параметром. Введем новую независимую переменную τ и постоянную b , положив

$$\tau = \int_0^t \sqrt{B(s)} ds, \quad b = \frac{1}{2} \int_0^T \sqrt{B(s)} ds.$$

Исключим ω_2, ω_3 из последних четырех уравнений (2.4) и перейдя к независимой переменной τ , получим систему, которую запишем в векторном виде [15]

$$A(\mathbf{q})\mathbf{q}'' + \mu^2 \frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = C(\tau)\mathbf{q}' + f(\tau, \mathbf{q}, \mathbf{q}'). \tag{2.5}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по τ , $\mathbf{q} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^T$, $\mu = \sqrt{l_0}$,

$$A(\mathbf{q}) = \operatorname{diag}(\cos^2 \tilde{\beta}, 1), \quad \Pi = -\cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta},$$

$$C(\tau) = \begin{pmatrix} g(\tau) & -p(\tau) \\ p(\tau) & g(\tau) \end{pmatrix}, \quad g = -\frac{B'}{2B}, \quad p = \frac{\lambda\omega_1 - 2\Phi_1}{\sqrt{B}},$$

$$f(\tau, \mathbf{q}, \mathbf{q}') - f(\tau, 0, 0) = O(\|\mathbf{q}\| + \|\mathbf{q}'\|^2),$$

B и Φ_1 выражаются в функции τ , $\|\cdot\|$ – евклидова норма. Переменная τ входит в систему (2.5) периодически с периодом $2b$. Рассмотрим матричную начальную задачу $2U' = CU$, $U(0) = E_2 \equiv \text{diag}(1, 1)$. Ее решение

$$U(\tau) = \sqrt[4]{\frac{B(0)}{B(\tau)}} \begin{pmatrix} \cos \psi(\tau) & -\sin \psi(\tau) \\ \sin \psi(\tau) & \cos \psi(\tau) \end{pmatrix}, \quad \psi(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\tau p(s) ds.$$

Представим его в виде произведения $U(\tau) = U_1(\tau)U_2(\tau)$, где

$$U_1(\tau) = \sqrt[4]{\frac{B(0)}{B(\tau)}} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}(\tau) & -\sin \tilde{\psi}(\tau) \\ \sin \tilde{\psi}(\tau) & \cos \tilde{\psi}(\tau) \end{pmatrix}, \quad U_2(\tau) = \begin{pmatrix} \cos a\tau & -\sin a\tau \\ \sin a\tau & \cos a\tau \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\psi}(\tau) = \psi(\tau) - a\tau, \quad a = \frac{1}{4b} \int_0^{2b} p(s) ds = \frac{\lambda\omega_1 T}{4b} - \frac{1}{2b} \int_0^T \Phi_1(t) dt.$$

Функция $\tilde{\psi}(\tau)$ и матрица $U_1(\tau)$ – периодические по τ с периодом $2b$, матрицы $U_1(\tau)$, $U_2(\tau)$ удовлетворяют уравнениям

$$U_1' + HU_1 = \frac{1}{2}CU_1, \quad U_2' = HU_2, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

В системе (2.5) сделаем замену переменных $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{u}$: $\mathbf{q} = U_1(\tau)\mathbf{u}$. Получим систему

$$\mathbf{u}'' - 2H\mathbf{u}' + (\mu^2 E_2 + H^2)\mathbf{u} = f_1(\tau, \mathbf{u}, \mathbf{u}') + \mu^2 F(\tau, \mathbf{u}), \quad (2.6)$$

в которой гладкие $2b$ -периодические по τ функции f_1 и F допускают оценки

$$f_1(\tau, \mathbf{u}, \mathbf{u}') - f_1(\tau, 0, 0) = O(\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{u}'\|^2), \quad F(\tau, \mathbf{u}) = O(\|\mathbf{u}\|^2).$$

Введем множество $I(\varepsilon) = \{\mu: \mu > 0, |\sin b(\mu + a)\sin b(\mu - a)| \geq \varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0, 1)$.

Оно не пусто и не ограничено. При $\varepsilon \ll 1$ оно представляет собой интервал $(0, +\infty)$ из которого удалены попавшие в него малые окрестности точек вида $\mu = \pm a + \pi m/b$ при целом m . Справедлива следующая теорема.

Теорема [160]: для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существуют такие положительные

числа M , C_1 и C_2 , что при $\mu \geq M$, $\mu \in I(\varepsilon)$ система (2.6) имеет единственное решение $\mathbf{u}_*(\tau, \mu)$, непрерывно зависящее от μ и удовлетворяющее неравенствам

$$\|\mathbf{u}_*(\tau, \mu)\| \leq \frac{C_1}{\mu^2}, \quad \|\mathbf{u}'_*(\tau, \mu)\| \leq \frac{C_2}{\mu}, \quad (0 \leq \tau \leq 2b).$$

К типу таких решений относятся рассмотренные выше решения в случае $k_\Omega = 0$. При $k_\Omega \neq 0$ периодические решения системы (2.4) могут существовать только при $\omega_1 = 0$. Последнее соотношение позволяет отбросить первое уравнение этой системы и перейти к системе вида (2.5), в матрице $C(\tau)$ которой

$$g = -\frac{k_\Omega}{\sqrt{B}} - \frac{B'}{2B}, \quad p = -\frac{2\Phi_1}{\sqrt{B}}.$$

Решение начальной задачи $2U' = CU$, $U(0) = E_2$ теперь имеет вид

$$U(\tau) = \sqrt[4]{\frac{B(0)}{B(\tau)}} e^{-\varphi(\tau)} \begin{pmatrix} \cos \psi(\tau) & -\sin \psi(\tau) \\ \sin \psi(\tau) & \cos \psi(\tau) \end{pmatrix},$$

$$\varphi(\tau) = \frac{k_\Omega}{2} \int_0^\tau B^{-1/2} ds = \frac{k_\Omega t}{2}, \quad \psi(\tau) = -\int_0^\tau \Phi_1 B^{-1/2} ds.$$

Представим это решение в виде произведения $U(\tau) = U_1(\tau)U_2(\tau)$, где

$$U_1(\tau) = \sqrt[4]{\frac{B(0)}{B(\tau)}} e^{-\tilde{\varphi}(\tau)} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}(\tau) & -\sin \tilde{\psi}(\tau) \\ \sin \tilde{\psi}(\tau) & \cos \tilde{\psi}(\tau) \end{pmatrix}, \quad U_2(\tau) = e^{-d\tau} \begin{pmatrix} \cos a\tau & -\sin a\tau \\ \sin a\tau & \cos a\tau \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\varphi}(\tau) = \varphi(\tau) - d\tau, \quad d = \frac{k_\Omega T}{4b} > 0, \quad \tilde{\psi}(\tau) = \psi(\tau) - a\tau, \quad a = -\frac{1}{2b} \int_0^T \Phi_1(t) dt.$$

Функции $\tilde{\varphi}(\tau)$ $\tilde{\psi}(\tau)$ и матрица $U_1(\tau)$ зависят от τ периодически с периодом $2b$, матрицы $U_1(\tau)$, $U_2(\tau)$ удовлетворяют уравнениям

$$U'_1 + HU_1 = \frac{1}{2}CU_1, \quad U'_2 = HU_2, \quad H = \begin{pmatrix} -d & -a \\ a & -d \end{pmatrix}.$$

В новой системе (2.5) сделаем замену переменных $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{u}$: $\mathbf{q} = U_1(\tau)\mathbf{u}$. Получим систему вида (2.6), в которой $2b$ -периодические по τ функции f_1 и F допускают указанные выше оценки.

Введем множество

$$I(\varepsilon) = \{\mu : \mu > 0, [\operatorname{sh}^2 bd + \sin^2 b(\mu + a)][\operatorname{sh}^2 bd + \sin^2 b(\mu - a)] \geq \varepsilon^2\},$$

$0 < \varepsilon < \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 db}$. Оно не пусто и не ограничено. При $\varepsilon < \operatorname{sh} db$ оно совпадает с интервалом $(0, +\infty)$. С новым множеством $I(\varepsilon)$ сформулированная выше теорема справедлива и для новой системы (2.6). Взяв $\varepsilon < \operatorname{sh} db$, можно игнорировать резонансы, существующие при $k_\Omega = 0$, но это потребует увеличения постоянных M , C_1 и C_2 . В случае $k_\Omega > 0$ влияние резонансов уменьшается по мере увеличения μ .

Множество $I(\varepsilon)$ можно рассматривать в плоскости (μ, Ω_G) . На этом множестве решение $\mathbf{u}_*(\tau, \mu)$ непрерывно зависит от обоих параметров. Именно такие решения имелись в виду в заключительной части предыдущего раздела, где говорилось о семействах решений задачи (2.1'), (2.3), зависящих от Ω_G .

2.7 Устойчивость периодических решений

Исследование устойчивости сводилось к вычислению мультипликаторов соответствующей системы уравнений в вариациях. Мультипликаторы обозначим ρ_k , $k = \overline{1, 6}$. Пусть сначала $k_\Omega = 0$. В этом случае система (2.1') имеет первый интеграл $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} = \text{const}$ и интегральное соотношение $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, поэтому два ее мультипликатора $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Систему (2.1') при $k_\Omega = 0$ можно привести к гамильтоновой форме. Следовательно, необходимые условия устойчивости ее периодических решений выражаются равенствами $|\rho_k| = 1$. Последние равенства проверялись при $k = \overline{3, 6}$ вместе с равенствами $\rho_1 = \rho_2 = 1$ для каждого найденного решения задачи (2.1'), (2.3). Необходимые условия устойчивости оказались выполненными для всех таких решений. Но расчеты были сделаны для дискретного набора значений l_0 и Ω_G , поэтому малые области неустойчивости в плоскости этих параметров могли быть пропущены.

При $k_\Omega > 0$ система (2.1') имеет интегральное соотношение $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, а

скалярное произведение $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n} = \xi$ удовлетворяет соотношению $\dot{\xi} + k_{\Omega} \xi = 0$. Отсюда находим два мультипликатора $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = \exp(-k_{\Omega} T)$. По теореме Лиувилля $\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 \rho_5 \rho_6 = \exp(-3k_{\Omega} T)$, поэтому $\rho_3 \rho_4 \rho_5 \rho_6 = \exp(-2k_{\Omega} T)$. Достаточные условия устойчивости решений задачи (2.1'), (2.3) выражаются неравенствами $|\rho_k| < 1$, $k = \overline{3, 6}$. Эти неравенства, а также выписанные соотношения для ρ_1 , ρ_2 и $\rho_3 \rho_4 \rho_5 \rho_6$ оказались выполненными для всех найденных решений. Во всех этих решениях мультипликаторы ρ_k , $k = \overline{3, 6}$ образуют две комплексно-сопряженные пары, причем $|\rho_k| \approx \exp(-k_{\Omega} T / 2)$. На рис. 2.5 показана схема расположения мультипликаторов системы (2.1') в зависимости от величины k_{Ω} . На рисунке и в легенде справа от него верхний индекс мультипликатора j соответствует определённому значению k_{Ω} . Из рисунка видно, что мультипликаторы $\rho_1^{(j)}$, $\rho_2^{(j)}$, $j = \overline{0, 3}$ лежат на действительной оси в положительной полуплоскости, остальные мультипликаторы $\rho_k^{(j)}$, $k = \overline{3, 6}$ лежат на соответствующих окружностях радиуса равного $|\rho_3^{(j)}| = |\rho_4^{(j)}| = |\rho_5^{(j)}| = |\rho_6^{(j)}|$. Значению $k_{\Omega} = 0$ соответствуют мультипликаторы $\rho_1^{(0)} = \rho_2^{(0)}$, $|\rho_3^{(0)}| = |\rho_4^{(0)}| = |\rho_5^{(0)}| = |\rho_6^{(0)}| = 1$.

Основные результаты главы 2

В этой главе предложена методика исследования устойчивости установившегося ориентированного движения КА. Возможности методики продемонстрированы на примере исследования углового движение осесимметричного КА с постоянным магнитом под действием механического момента, создаваемого влиянием на магнит магнитного поля Земли (МПЗ). При этом в качестве модели МПЗ использовалась модель IGRF.

Основные полученные результаты:

1. Реализована аппроксимация близких к периодическим установившихся

движений КА набором периодических решений модифицированных уравнений движения.

2. Доказано существование периодических решений модифицированных уравнений движения режима одноосной магнитной ориентации осесимметричного КА в случае использования модели IGRF магнитного поля Земли (МПЗ).

3. С помощью предложенной методики численного параметрического исследования установившихся режимов угловых движений КА изучено влияние значений параметров уравнений движения на возникновение резонансов между вращением вектора индукции МПЗ вдоль орбиты и колебания продольной оси симметрии КА относительно этого вектора.

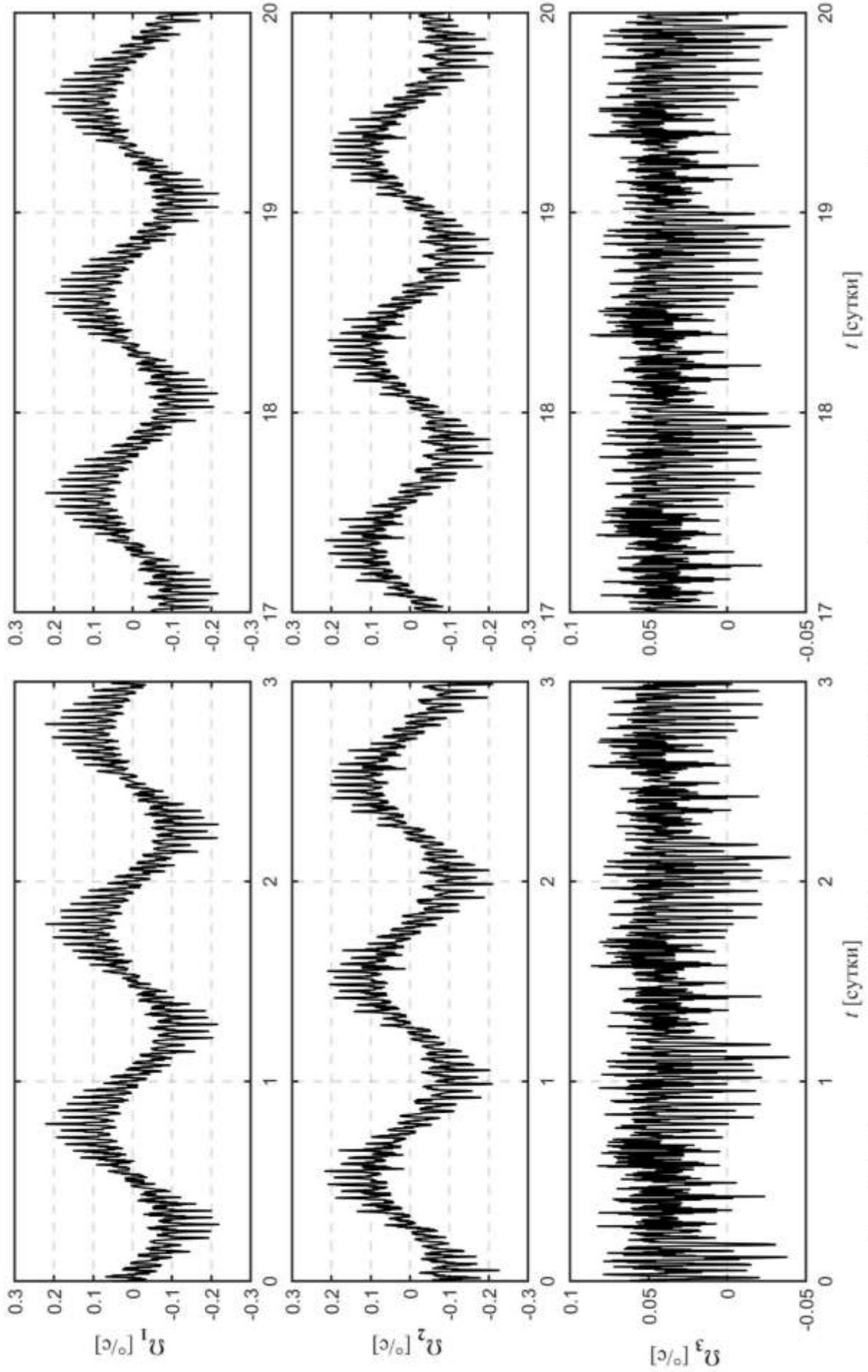


Рис. 2.1. Решение системы (2.1) при $k_\Omega = 0.00015 \text{ c}^{-1}$, модель МПЗ IGRF; компоненты вектора Ω .

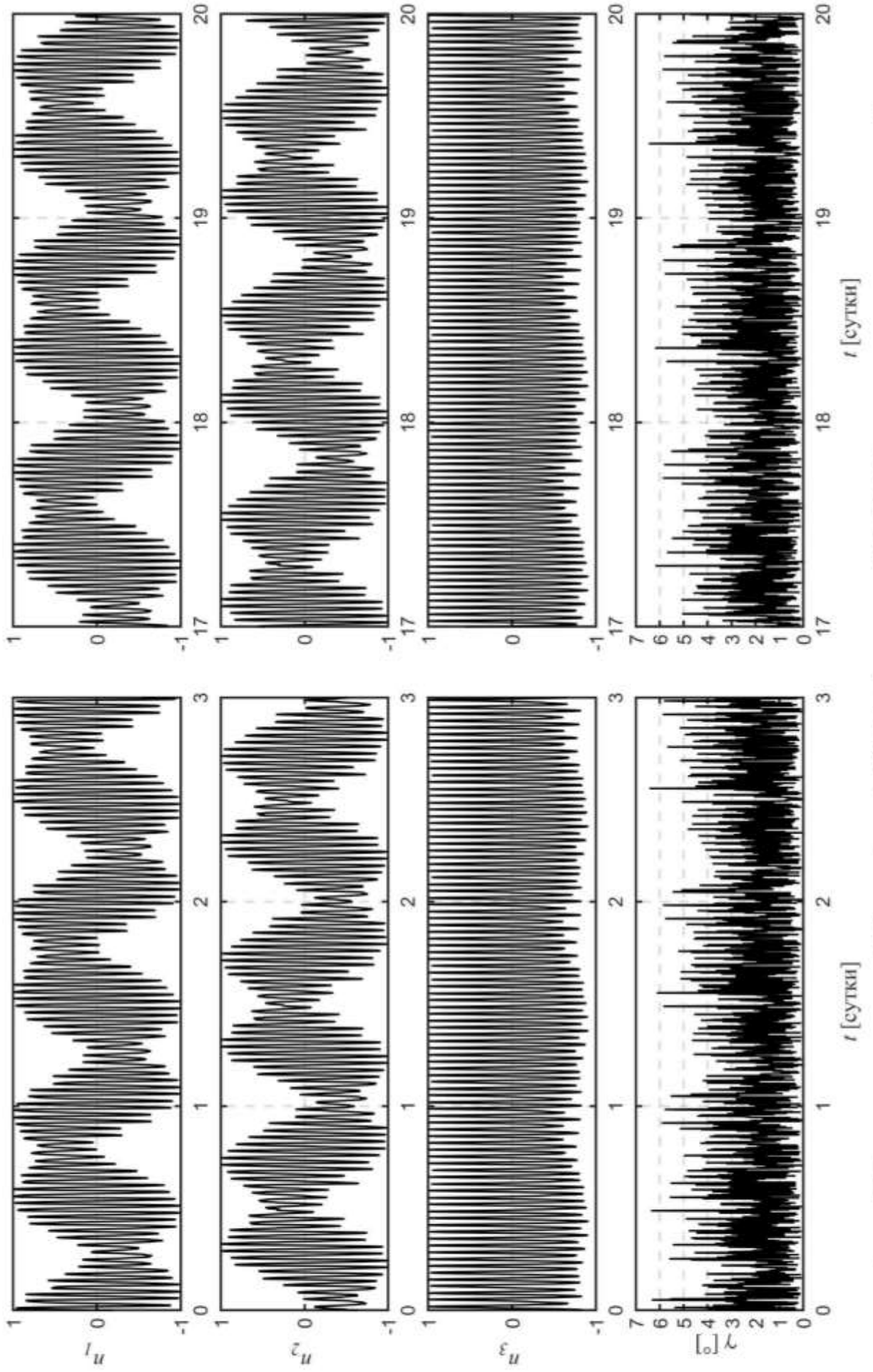


Рис. 2.2.2. Решение системы (2.1) при $k_\Omega = 0.00015 \text{ c}^{-1}$, модель МПЗ IGRF: компоненты орта $\mathbf{n}$ и угол γ .

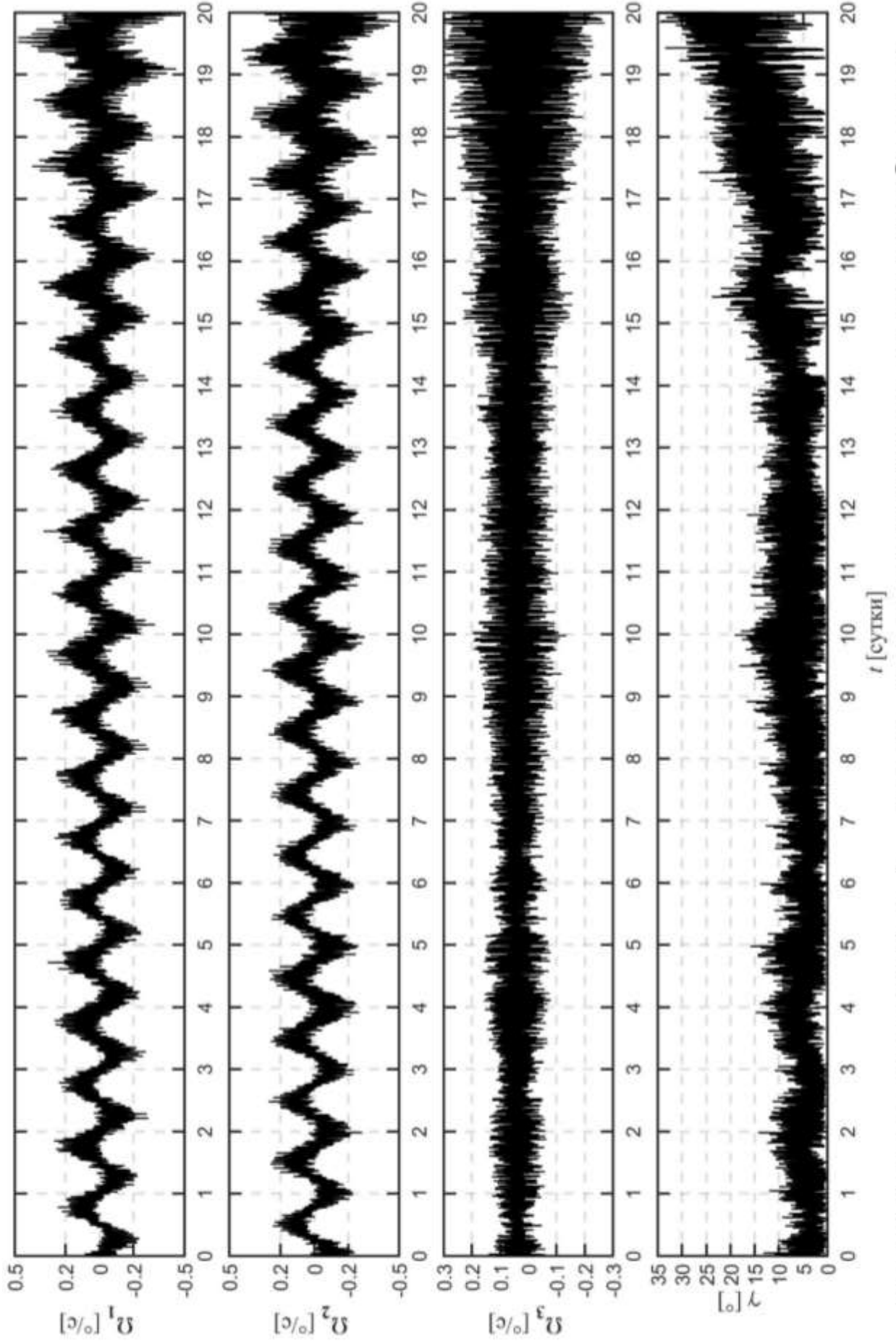


Рис. 2.3. Решение системы (2.1) при $k_{\Omega} = 0$ и $\mathbf{n} \cdot \Omega = 0$, модель МПЗ IGRF: компоненты вектора Ω и угол γ .

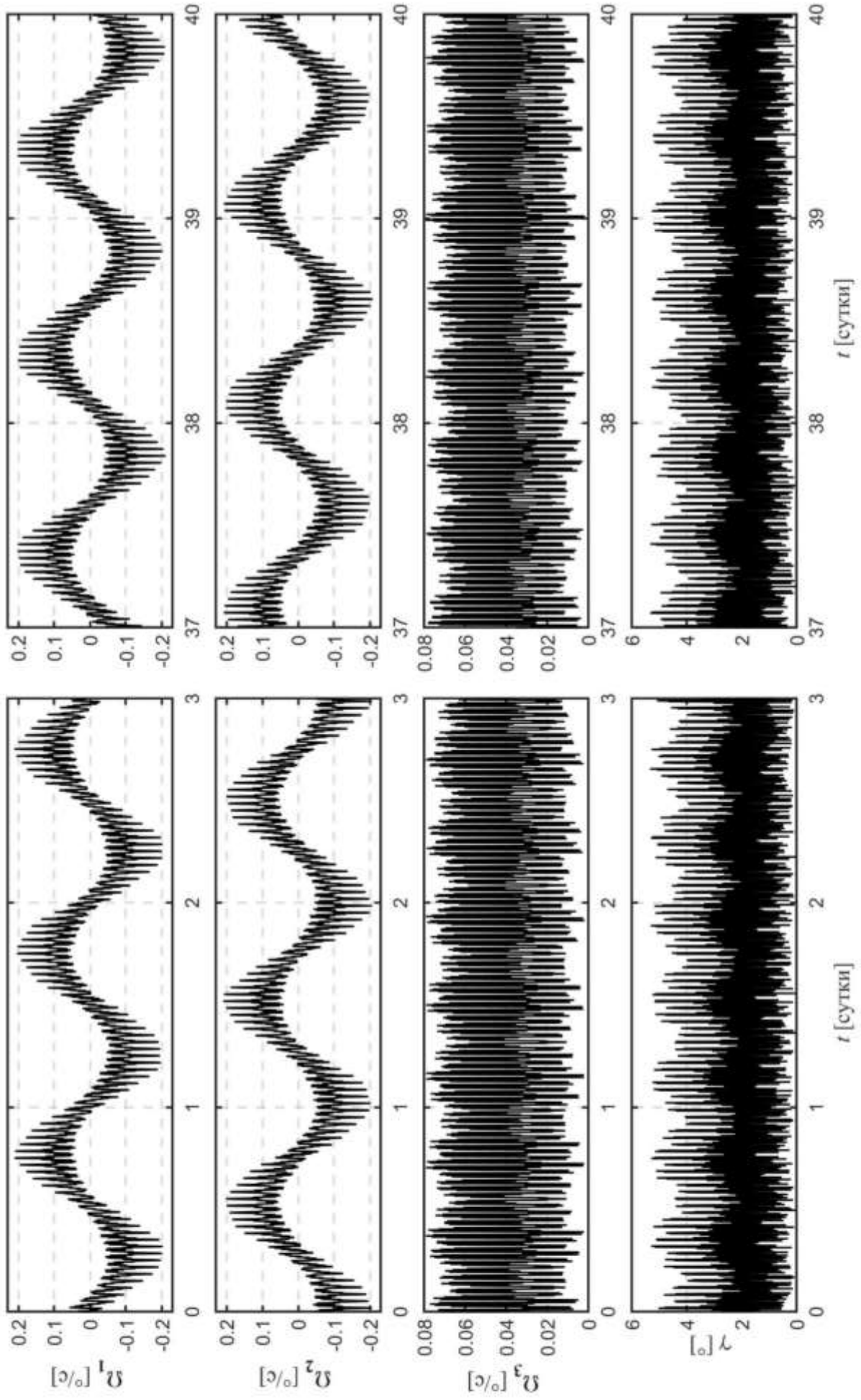


Рис. 2.4. Решение системы (2.1) при $k_{\Omega} = 0$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$, модель МПЗ прямой диполь: компоненты вектора $\mathbf{\Omega}$ и угол $\tilde{\gamma}$.

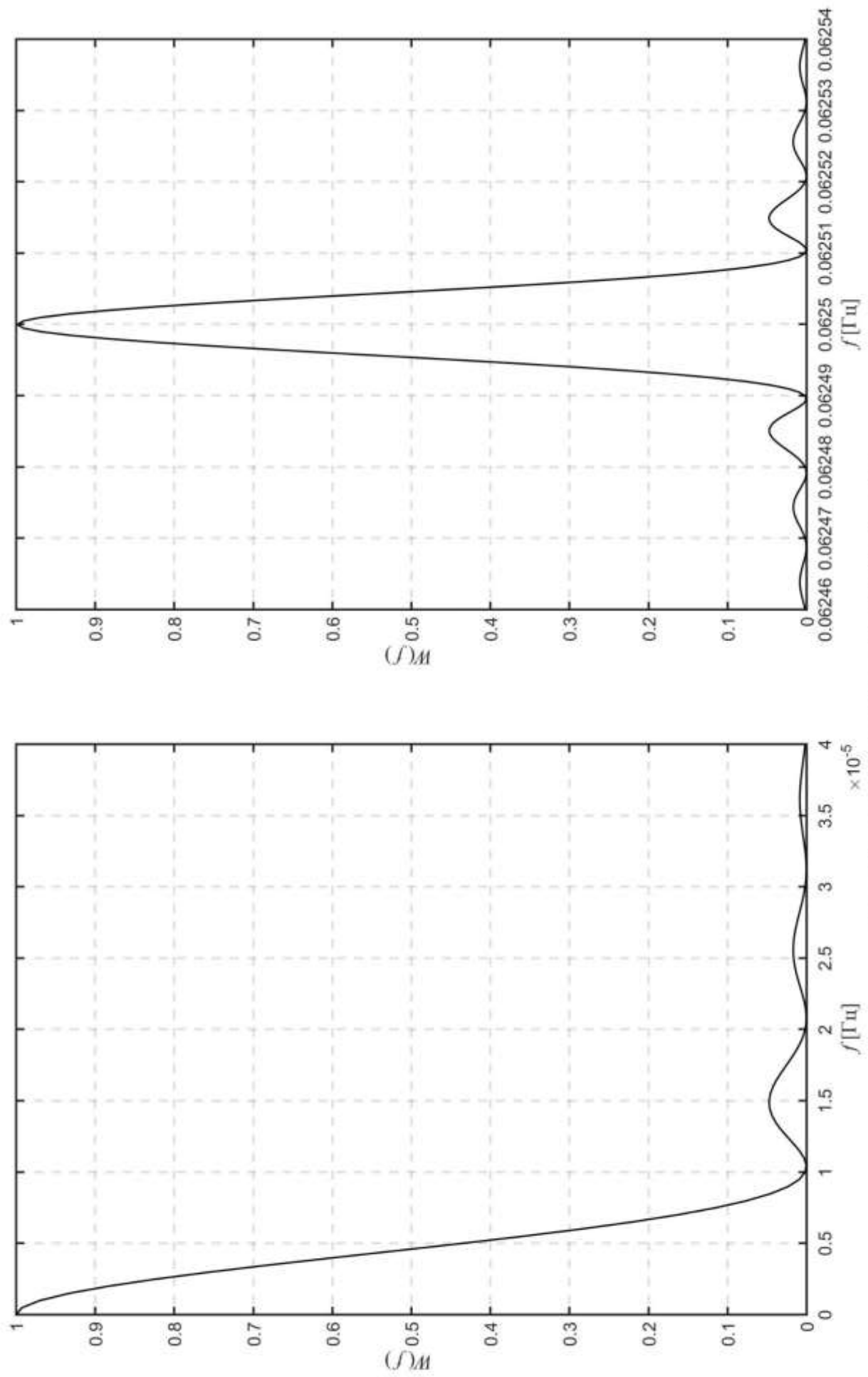


Рис. 2.5. Функция окна, $N = 6000$, $h = 16$ с.

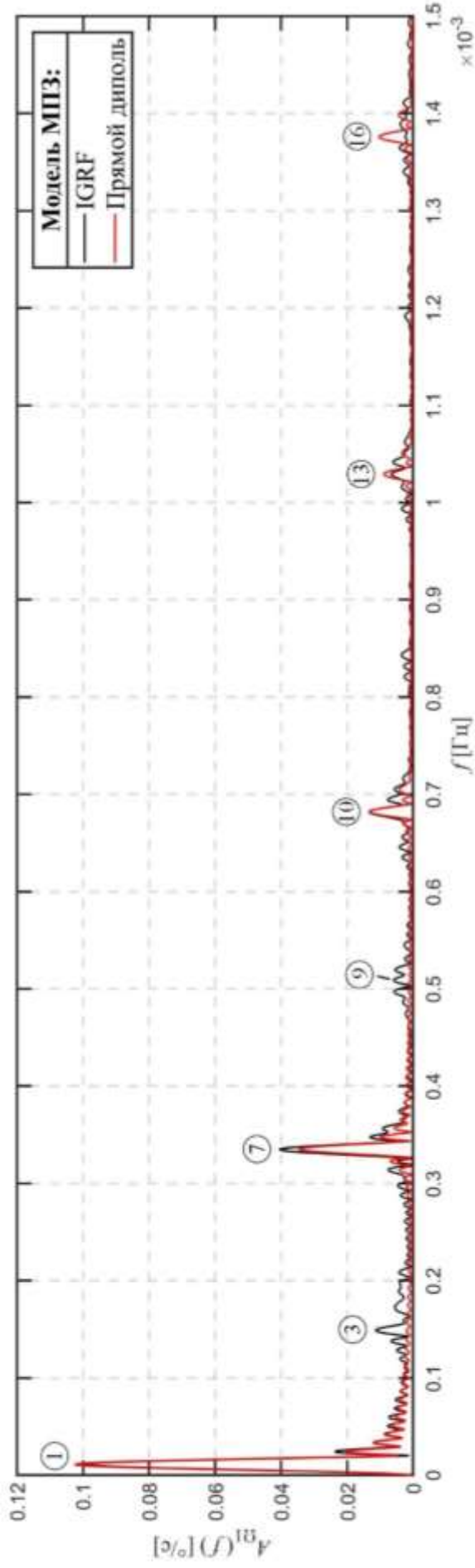


Рис. 2.6. Амплитудный спектр компоненты Ω_1 , $k_\Omega = 0.00015 \text{ c}^{-1}$.

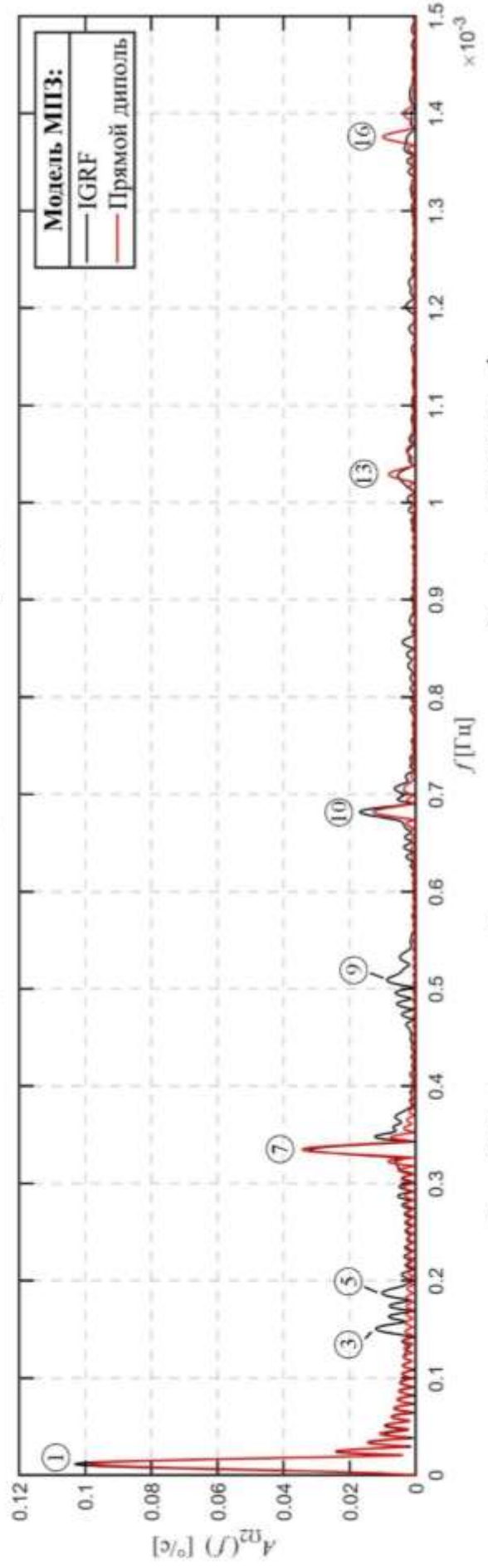


Рис. 2.7. Амплитудный спектр компоненты Ω_2 , $k_\Omega = 0.00015 \text{ c}^{-1}$.

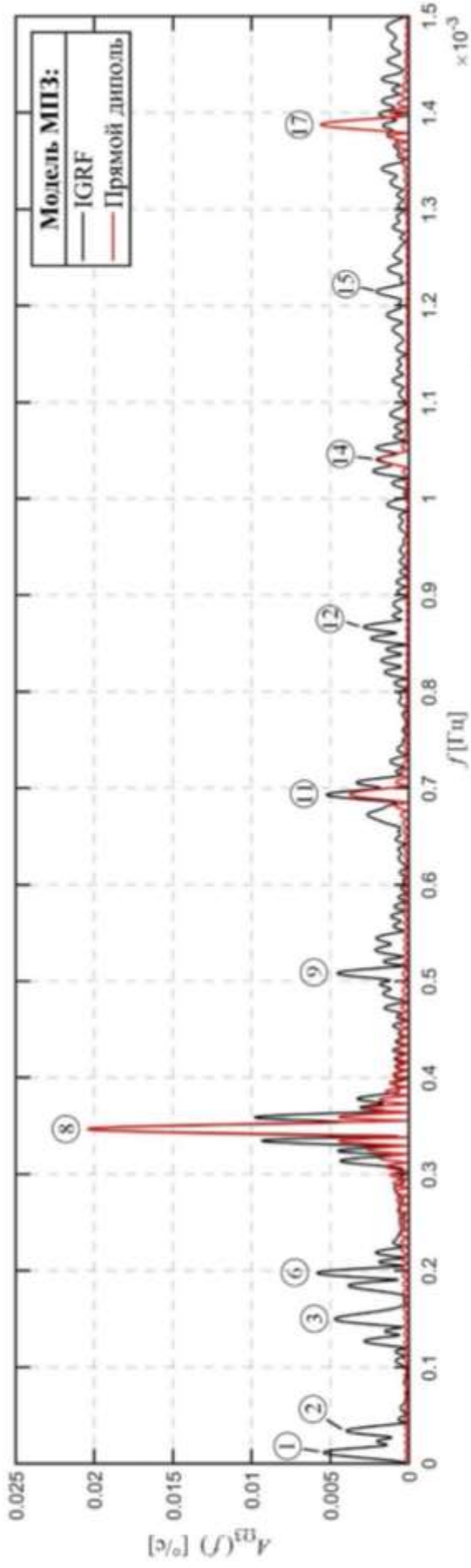


Рис. 2.8. Амплитудный спектр компоненты Ω_3 , $k_\Omega = 0.00015 \text{ c}^{-1}$.

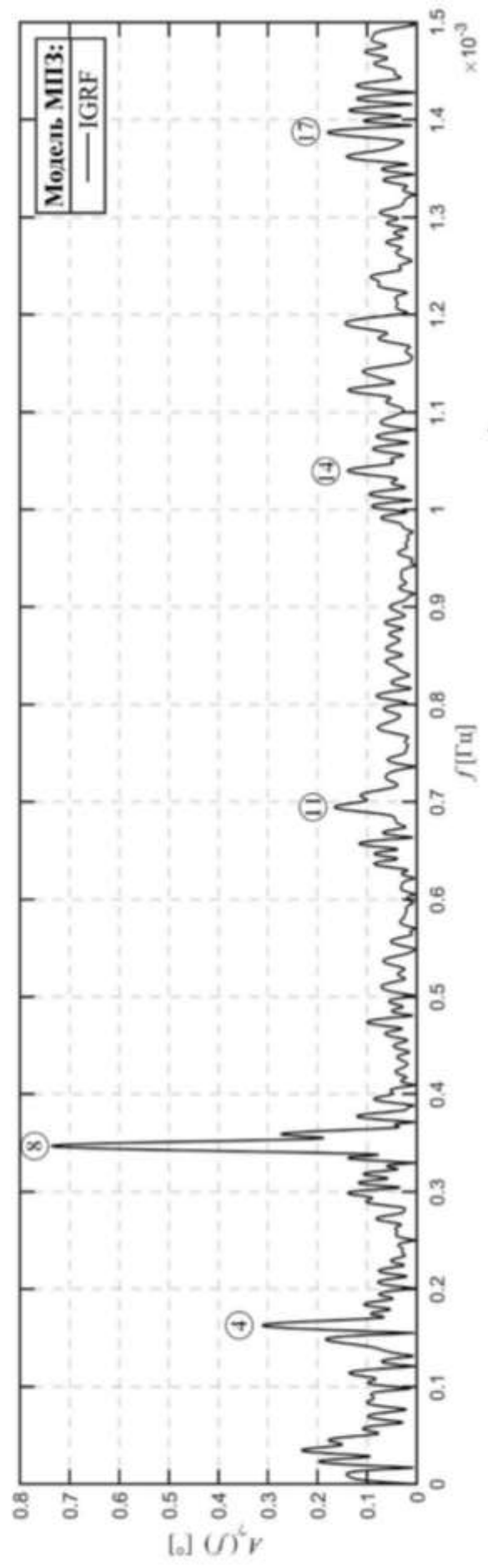


Рис. 2.9. Амплитудный спектр угла $\tilde{\gamma}$, $k_\Omega = 0.00015 \text{ c}^{-1}$.

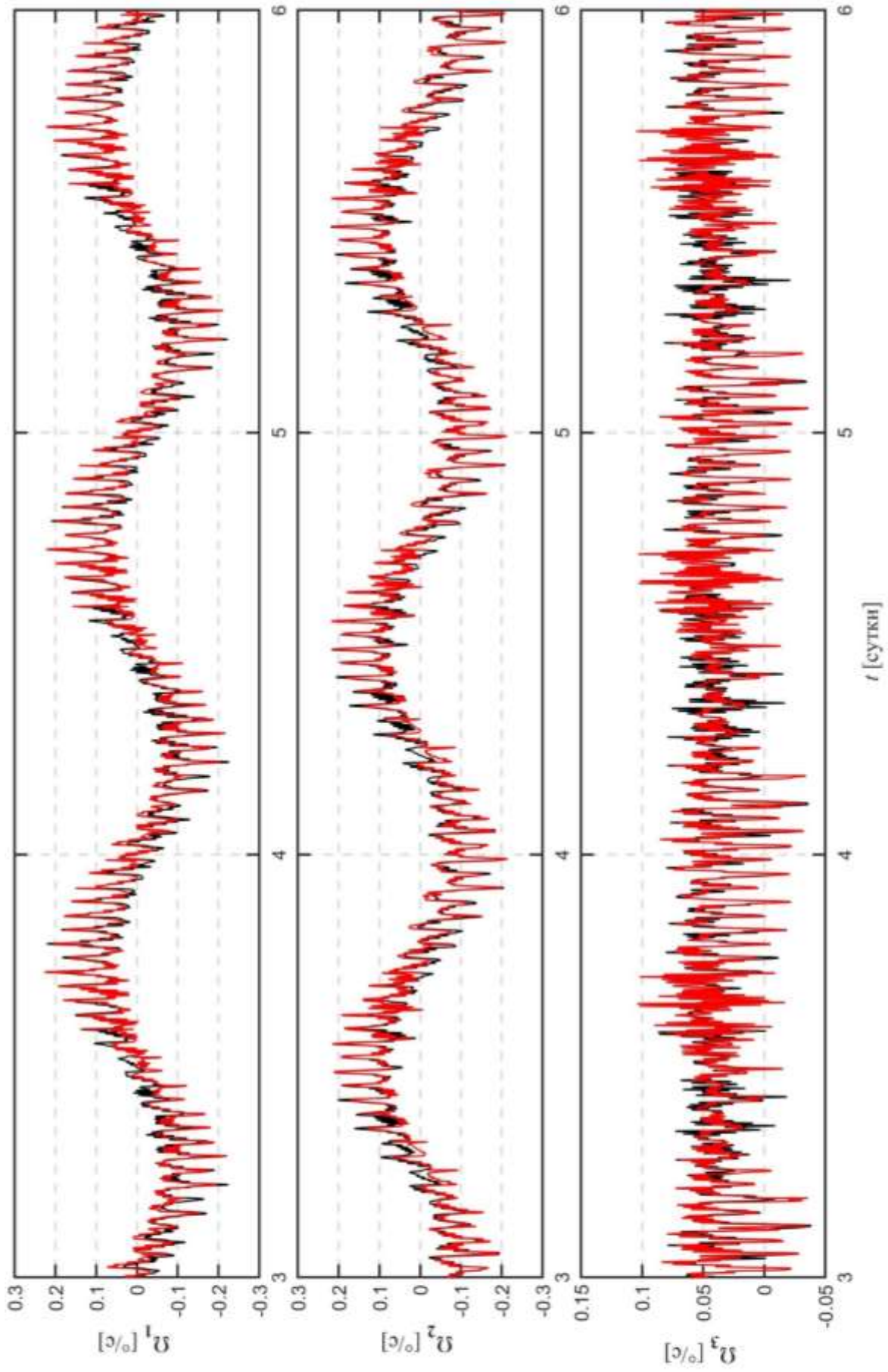


Рис. 2.10. Аппроксимация решений системы уравнений (2.1) при $k_{\Omega} = 0.00015 \text{ c}^{-1}$; компоненты вектора Ω . Черные линии – решения системы (2.1), красные линии – решения краевой задачи (2.1'), (2.3).

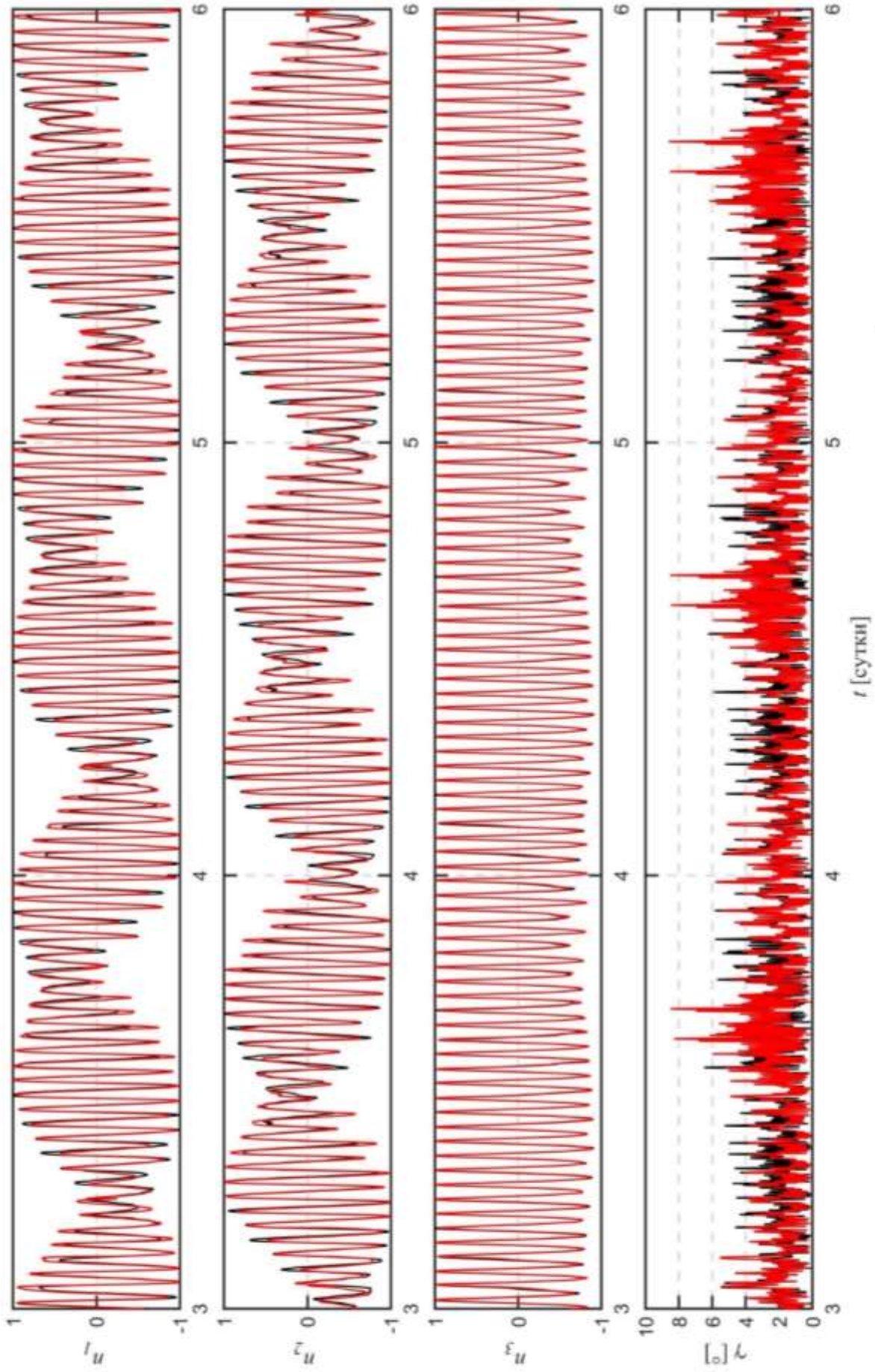


Рис. 2.11. Аппроксимация решений системы уравнений (2.1) при $k_{\Omega} = 0.00015 \text{ c}^{-1}$; компоненты орта $\mathbf{n}$ и угол $\tilde{\gamma}$. Черные линии – решения системы (2.1), красные линии – решения краевой задачи (2.1'), (2.3).

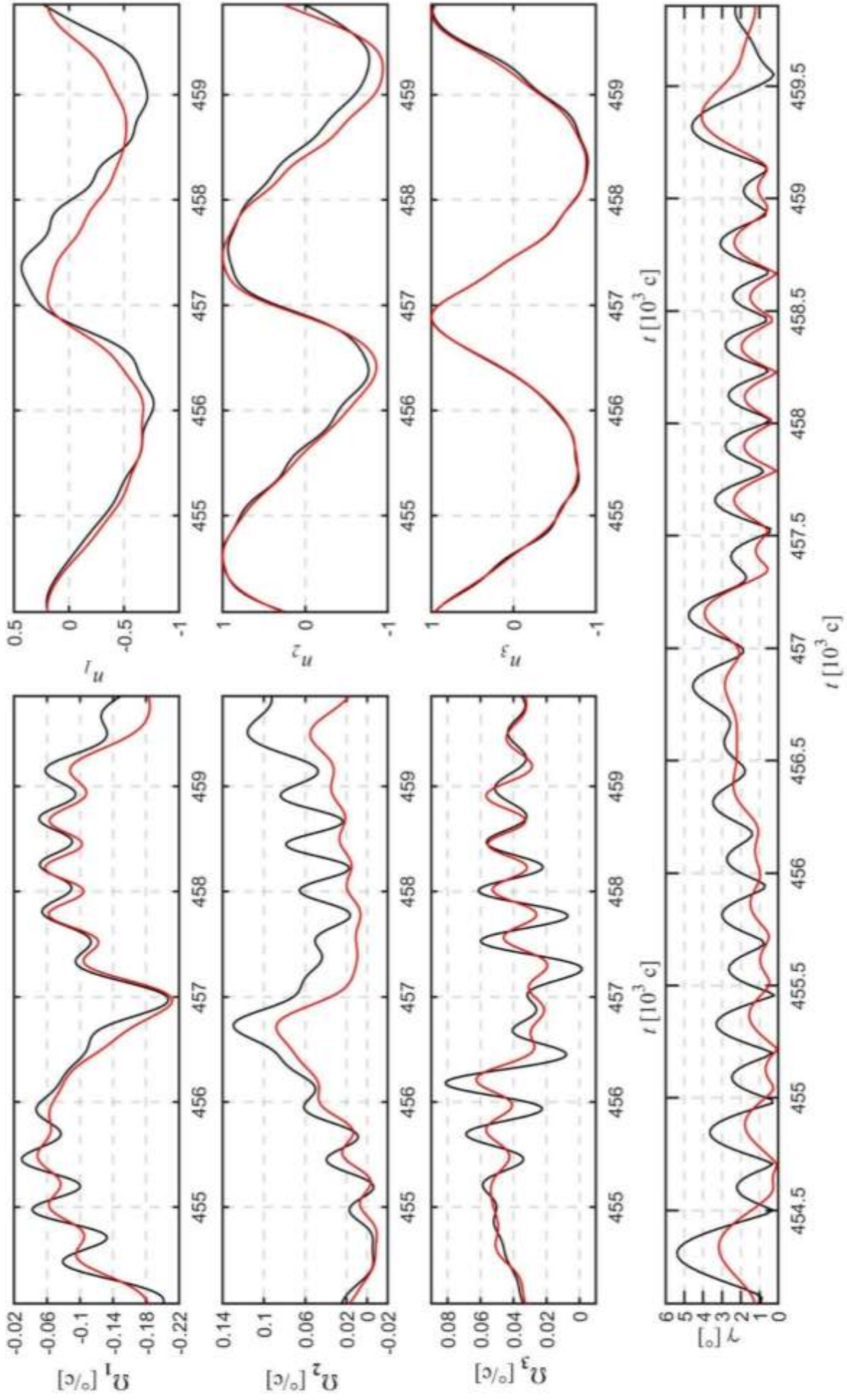


Рис. 2.12. Аппроксимация решений системы уравнений (2.1) при $k_\Omega = 0.00015 \text{ c}^{-1}$; компоненты вектора $\mathbf{\Omega}$, орта $\mathbf{n}$ и угол $\tilde{\gamma}$. Черные линии – решения системы (2.1), красные линии – решения краевой задачи (2.1'), (2.3).

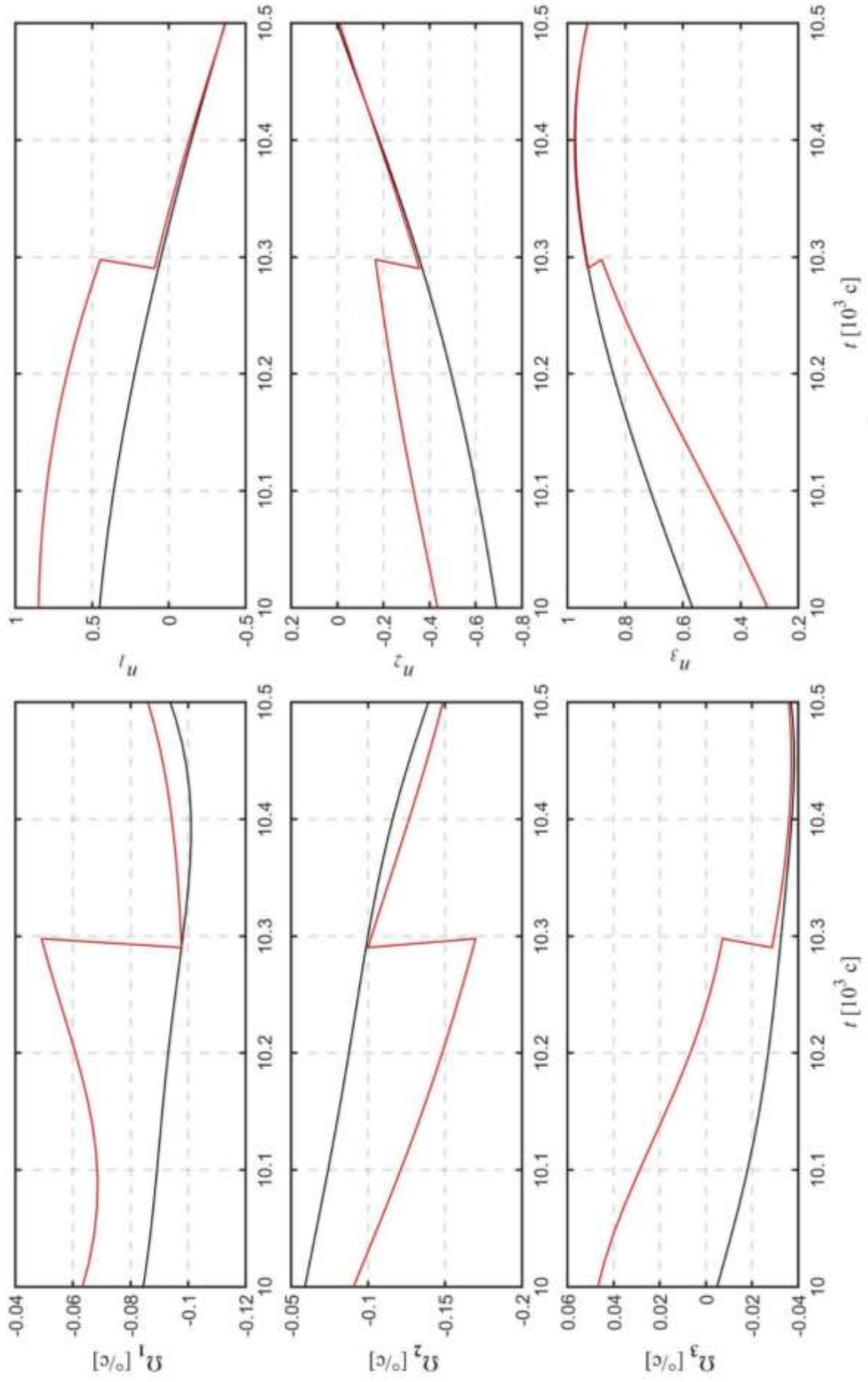


Рис. 2.13. Аппроксимация решений системы уравнений (2.1) при $k_\Omega = 0.00015 \text{ c}^{-1}$; компоненты вектора Ω и орта $\mathbf{n}$. Черные линии – решения системы (2.1), красные линии – решения краевой задачи (2.1'), (2.3).

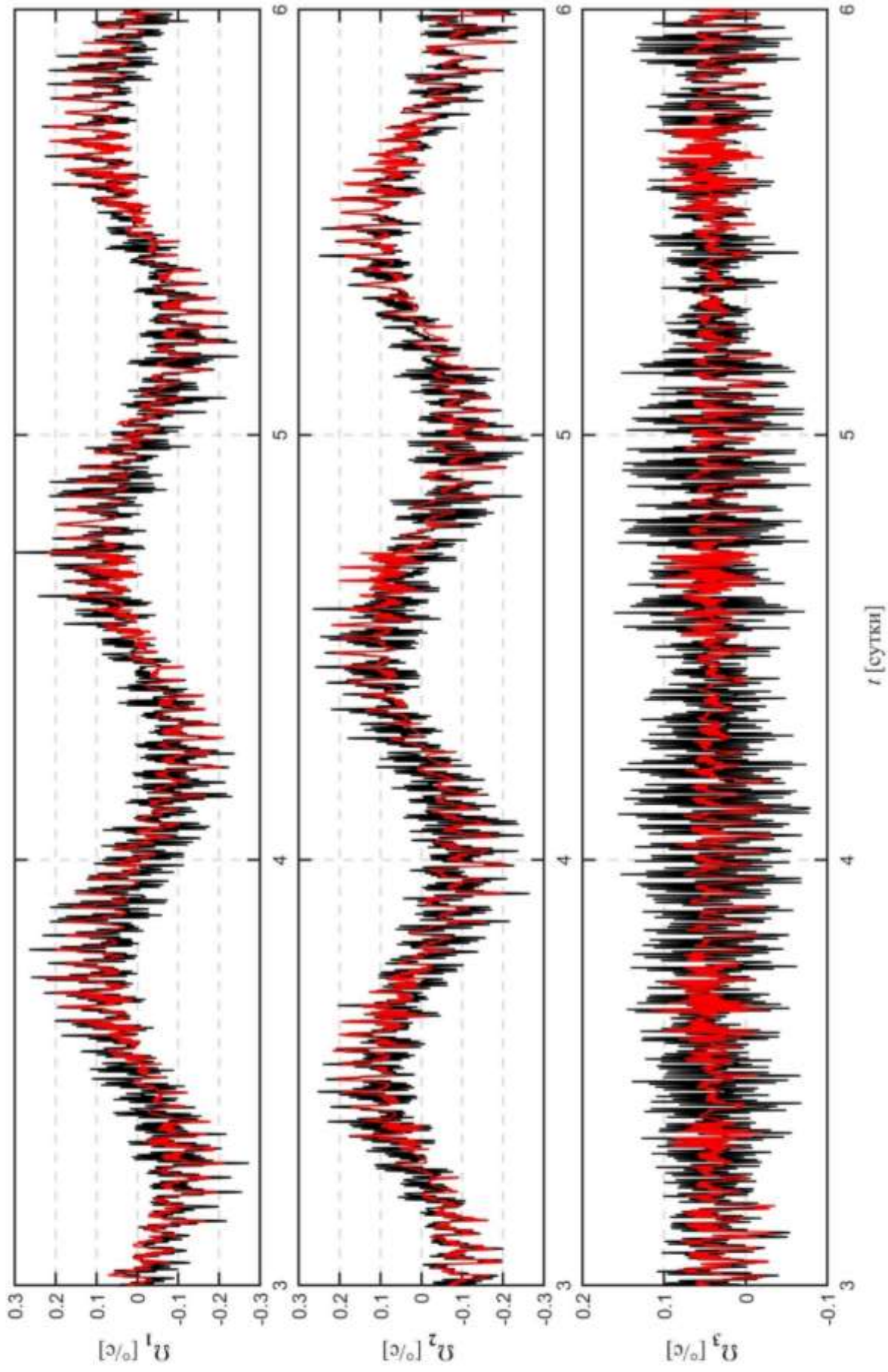


Рис. 2.14. Аппроксимация решений системы уравнений (2.1) при $k_{\Omega} = \mathbf{n} \cdot \Omega = 0$: компоненты вектора Ω .
Черные линии – решения системы (2.1), красные линии – решения краевой задачи (2.1'), (2.3).

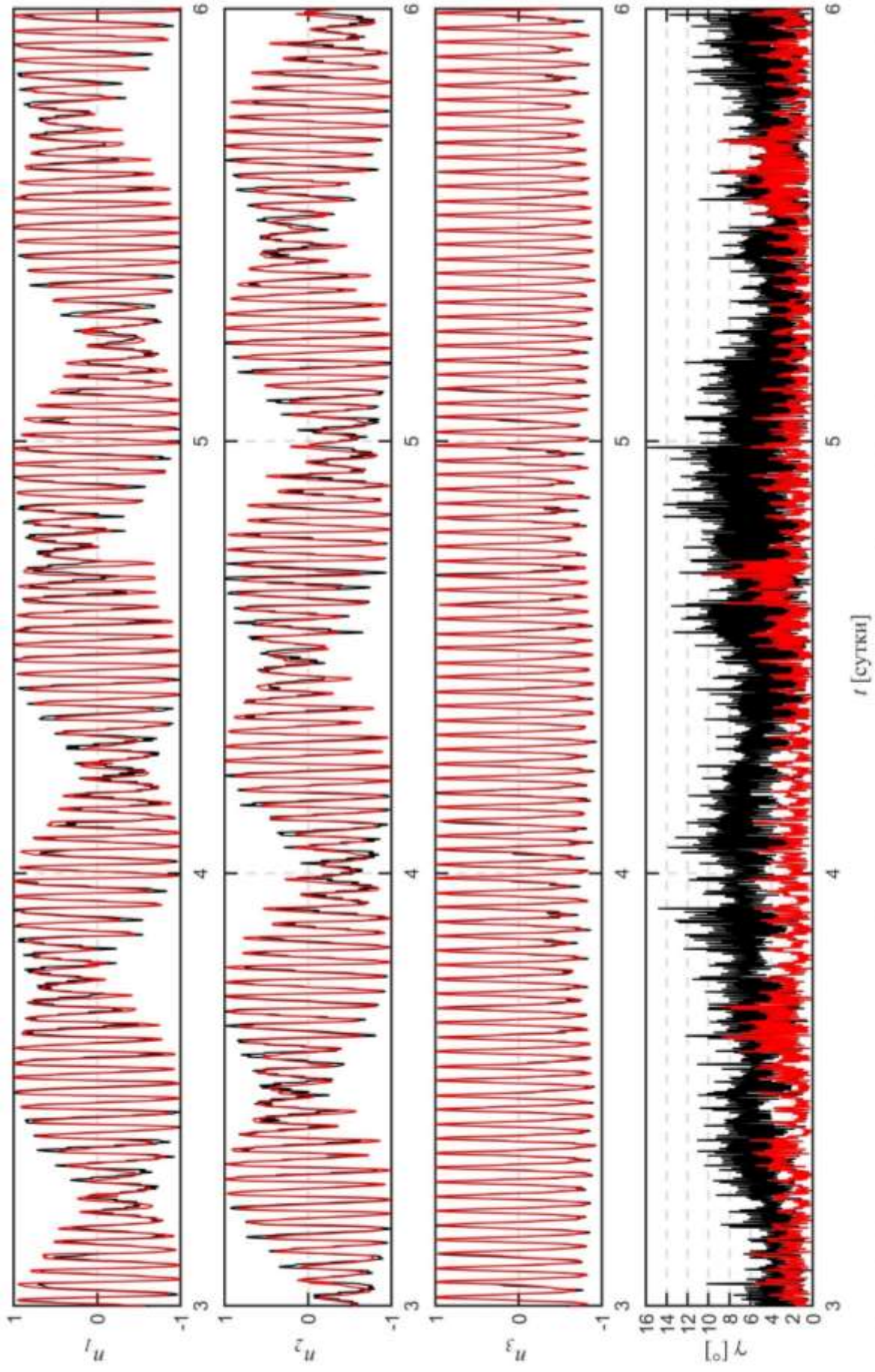


Рис. 2.15. Аппроксимация решений системы уравнений (2.1) при $k_{\Omega} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$: компоненты орта $\mathbf{n}$ и угол $\tilde{\gamma}$. Черные линии – решения системы (2.1), красные линии – решения краевой задачи (2.1'), (2.3).

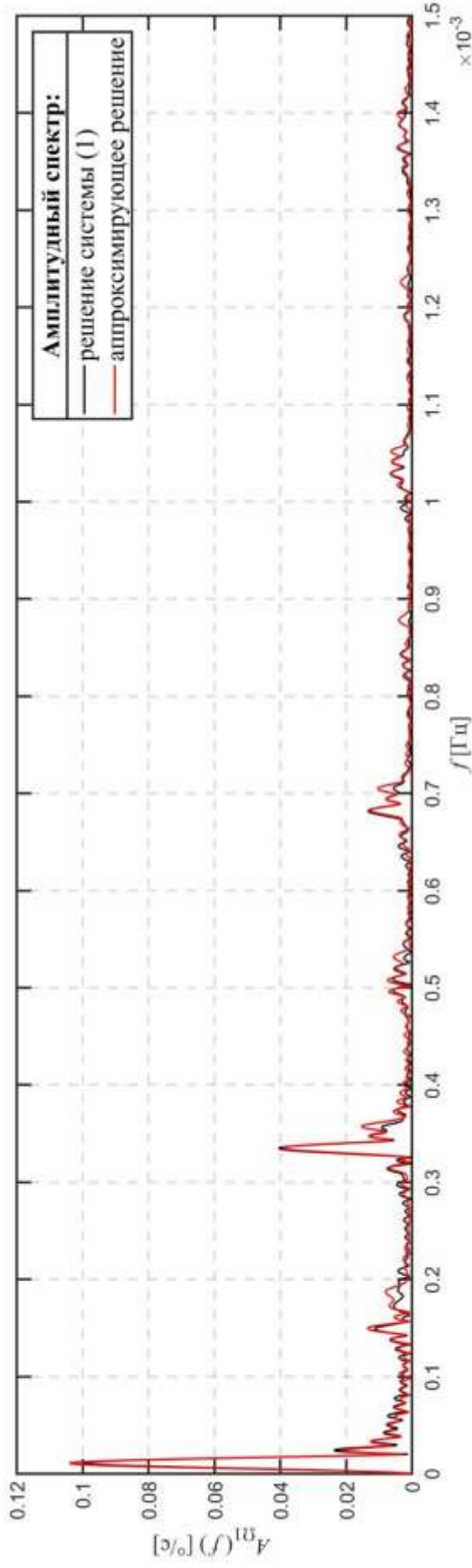


Рис. 2.16. Амплитудный спектр компоненты Ω_1 , $k_\Omega = 0.00015 \text{ c}^{-1}$.

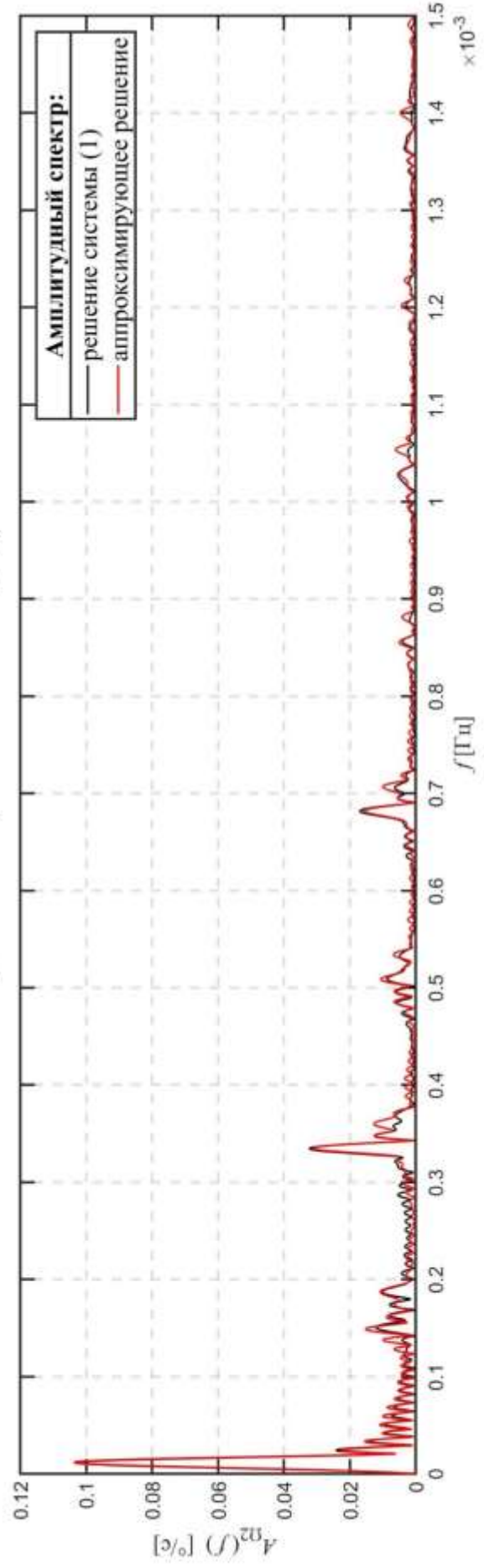


Рис. 2.17. Амплитудный спектр компоненты Ω_2 , $k_\Omega = 0.00015 \text{ c}^{-1}$.

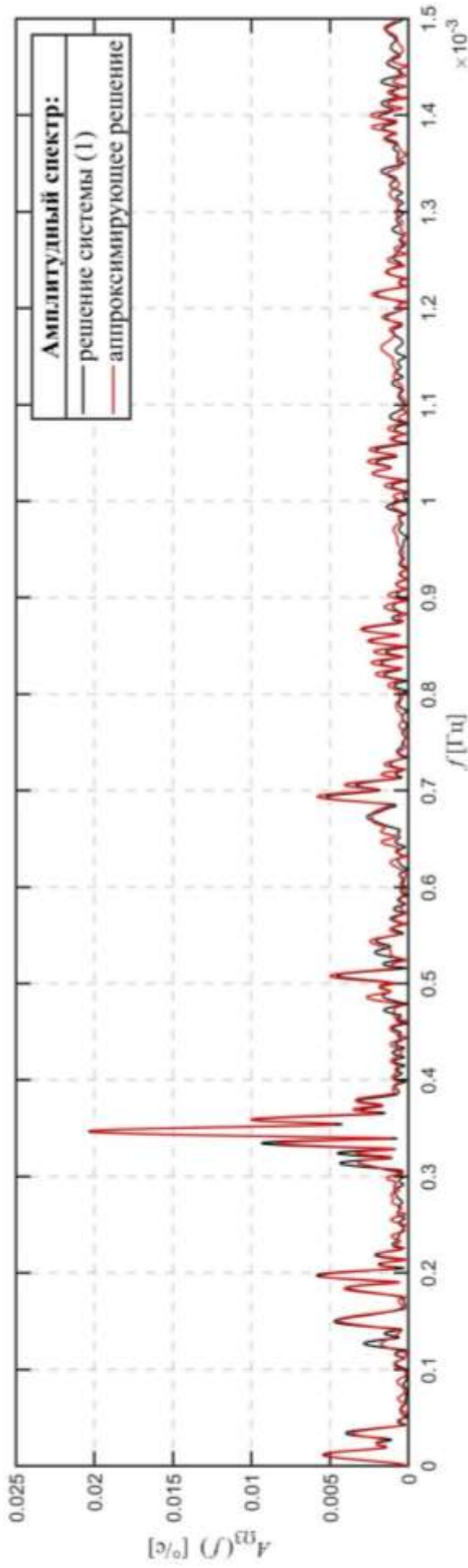


Рис. 2.18. Амплитудный спектр компоненты Ω_3 , $k_\Omega = 0.00015 \text{ c}^{-1}$.

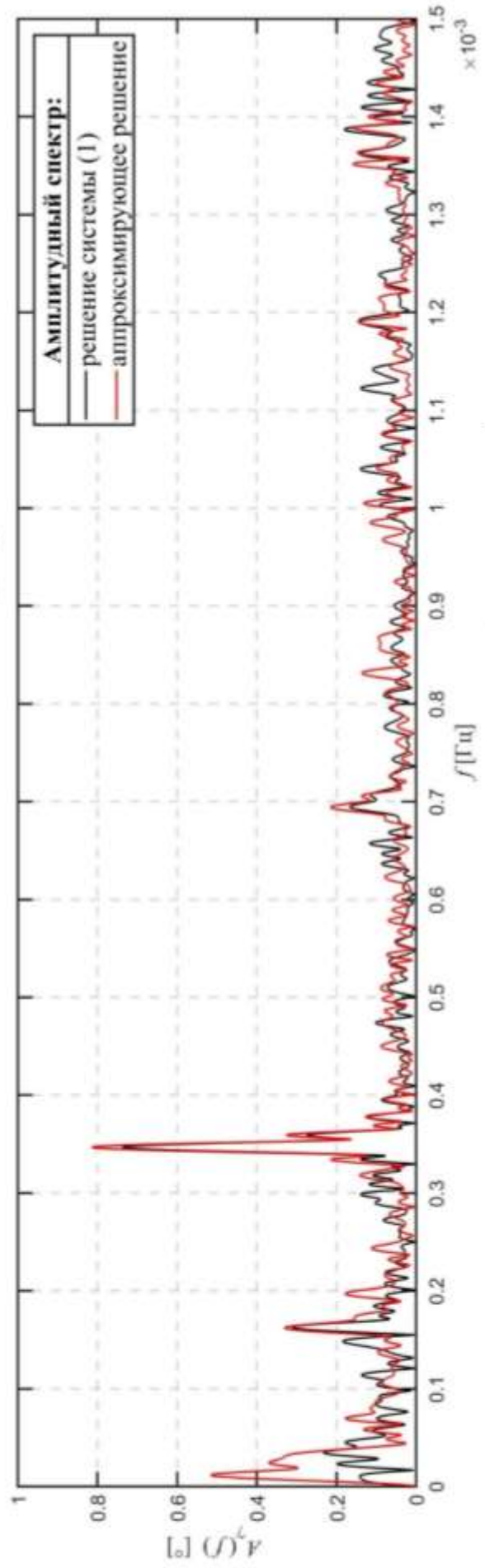


Рис. 2.19. Амплитудный спектр угла $\tilde{\gamma}$, $k_\Omega = 0.00015 \text{ c}^{-1}$.

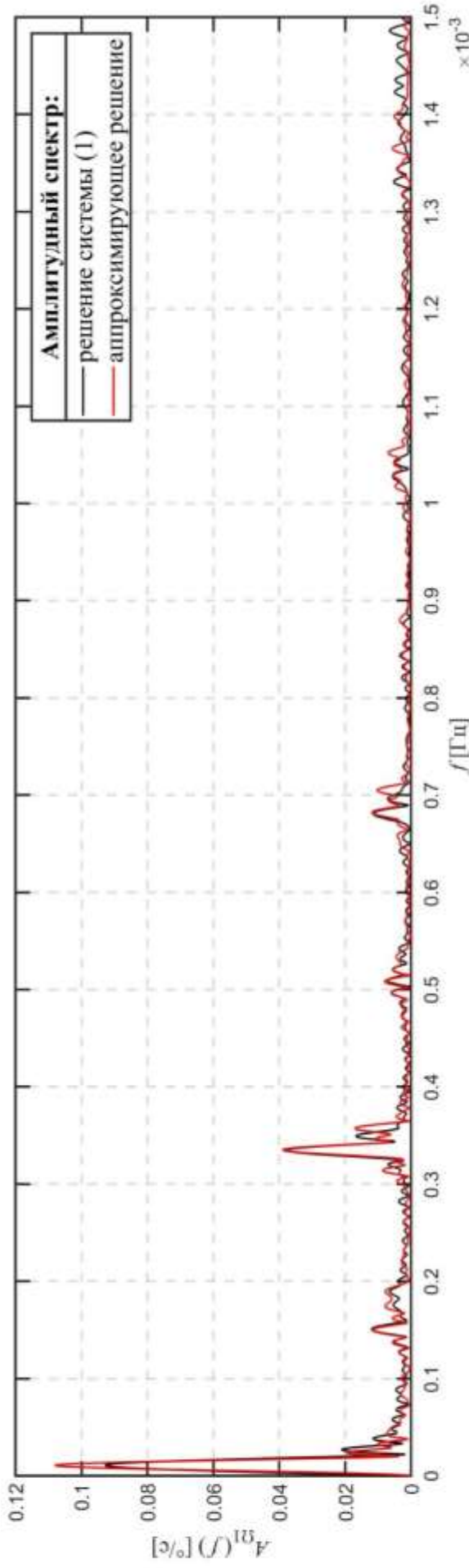


Рис. 2.20. Амплитудный спектр компоненты Ω_1 , $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$.

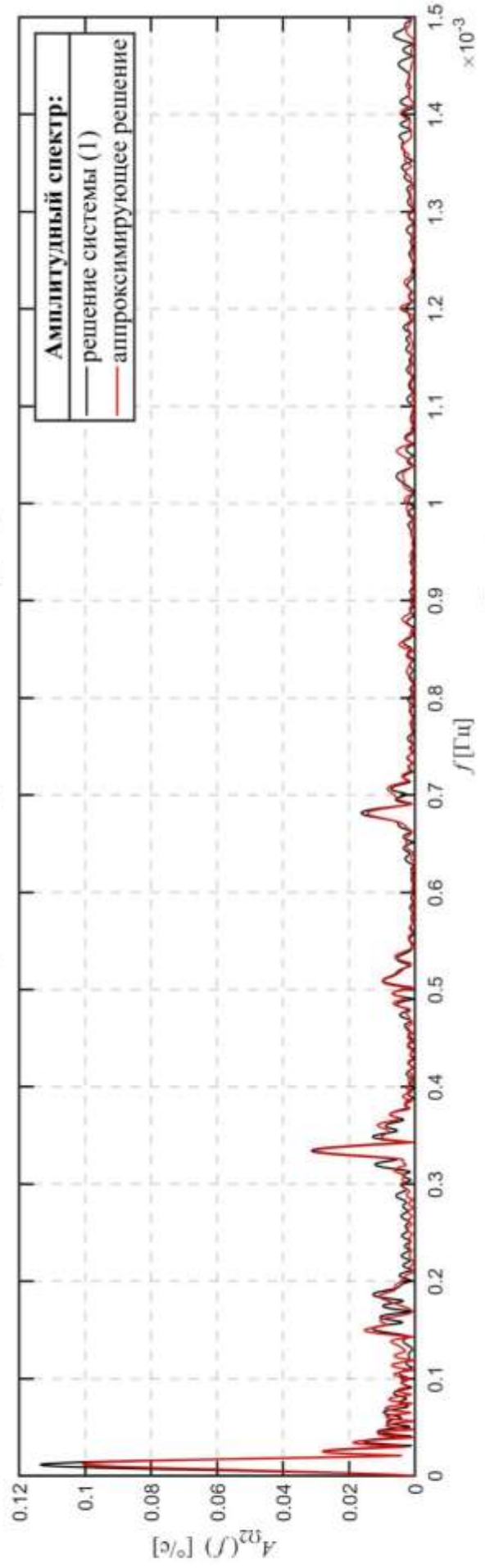


Рис. 2.21. Амплитудный спектр компоненты Ω_2 , $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$.

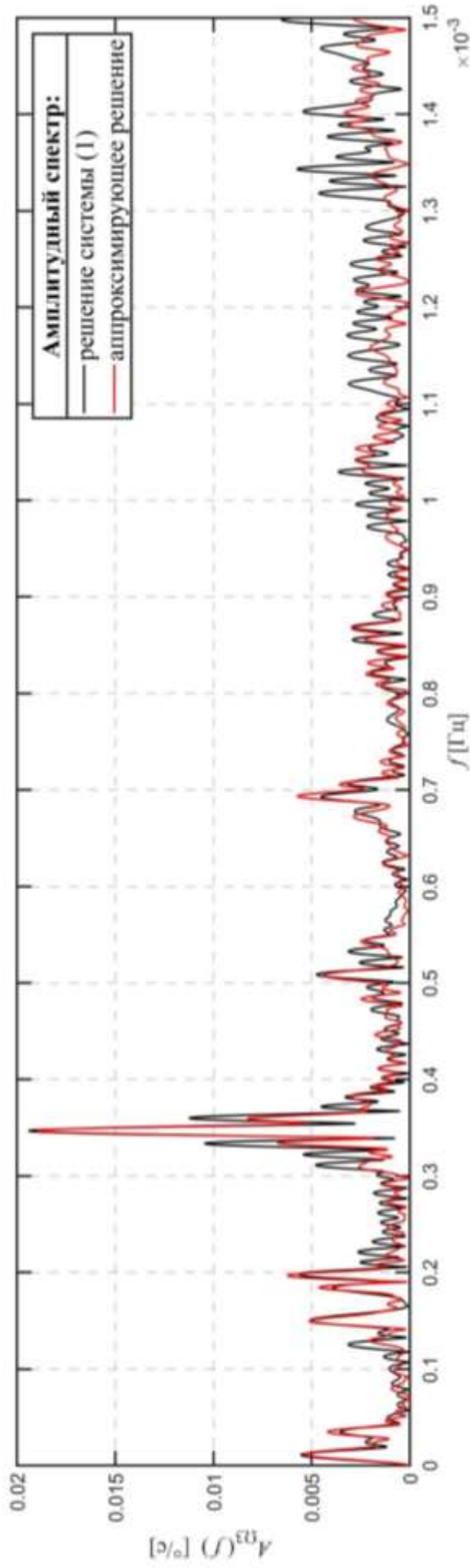


Рис. 2.22. Амплитудный спектр компоненты Ω_3 , $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$.

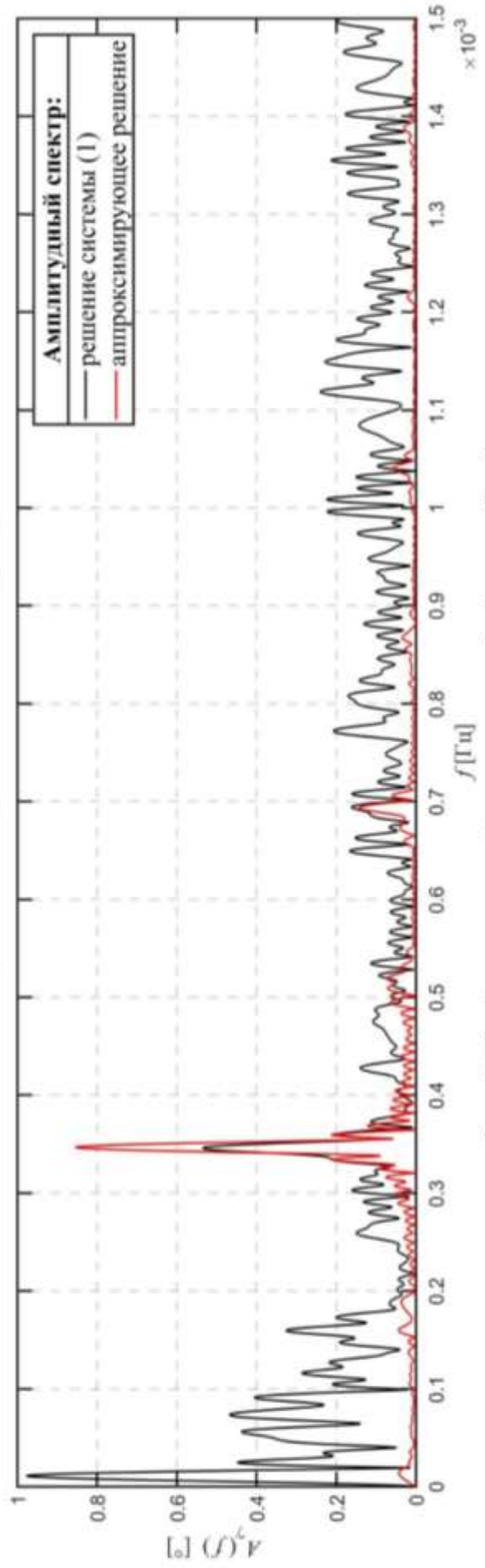


Рис. 2.23. Амплитудный спектр угла $\tilde{\gamma}$, $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$.

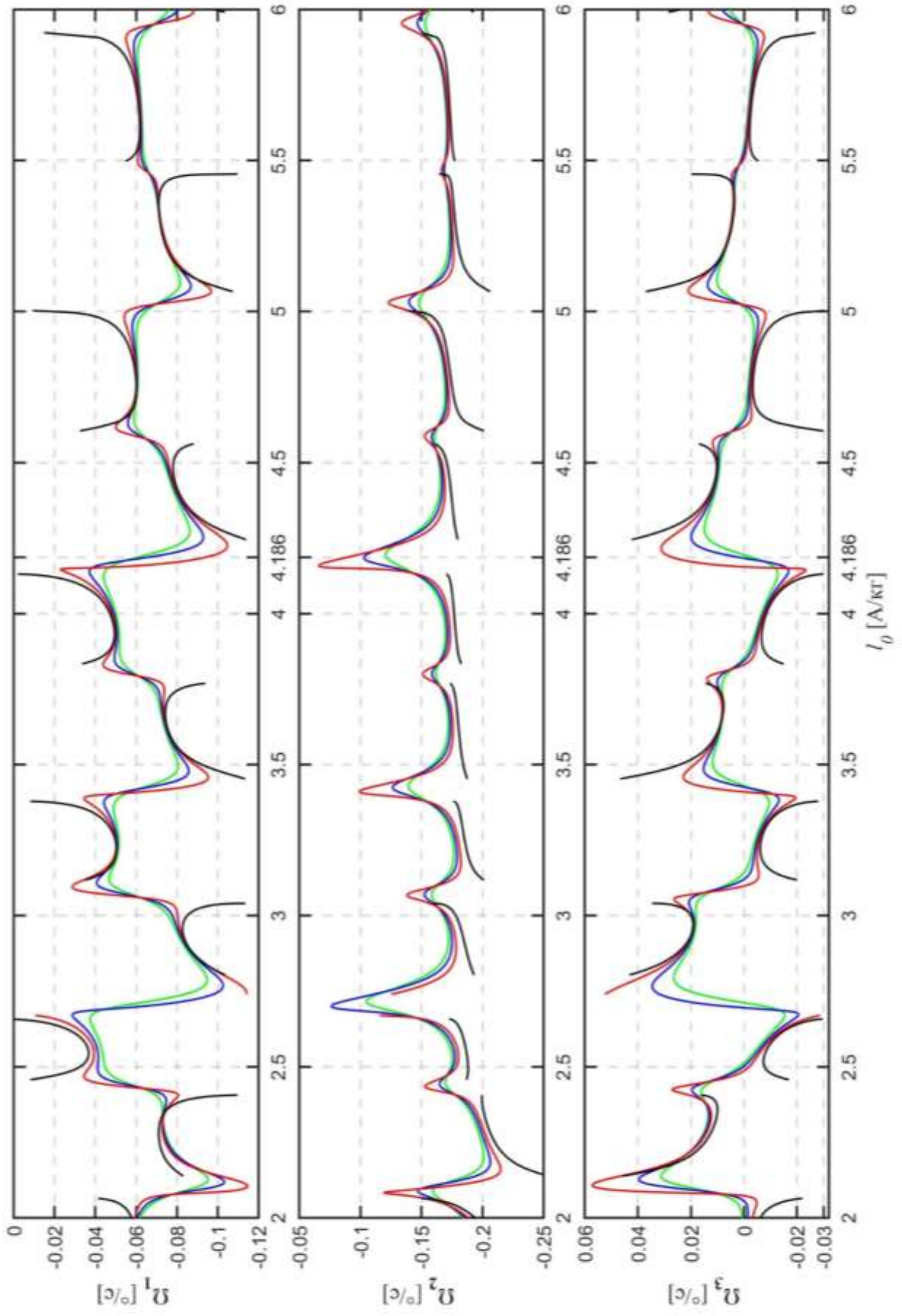


Рис. 2.24. Начальные условия решений краевой задачи (2.1'), (2.3) при $\Omega_G = 11.67^\circ$; компоненты вектора $\Omega(0)$.

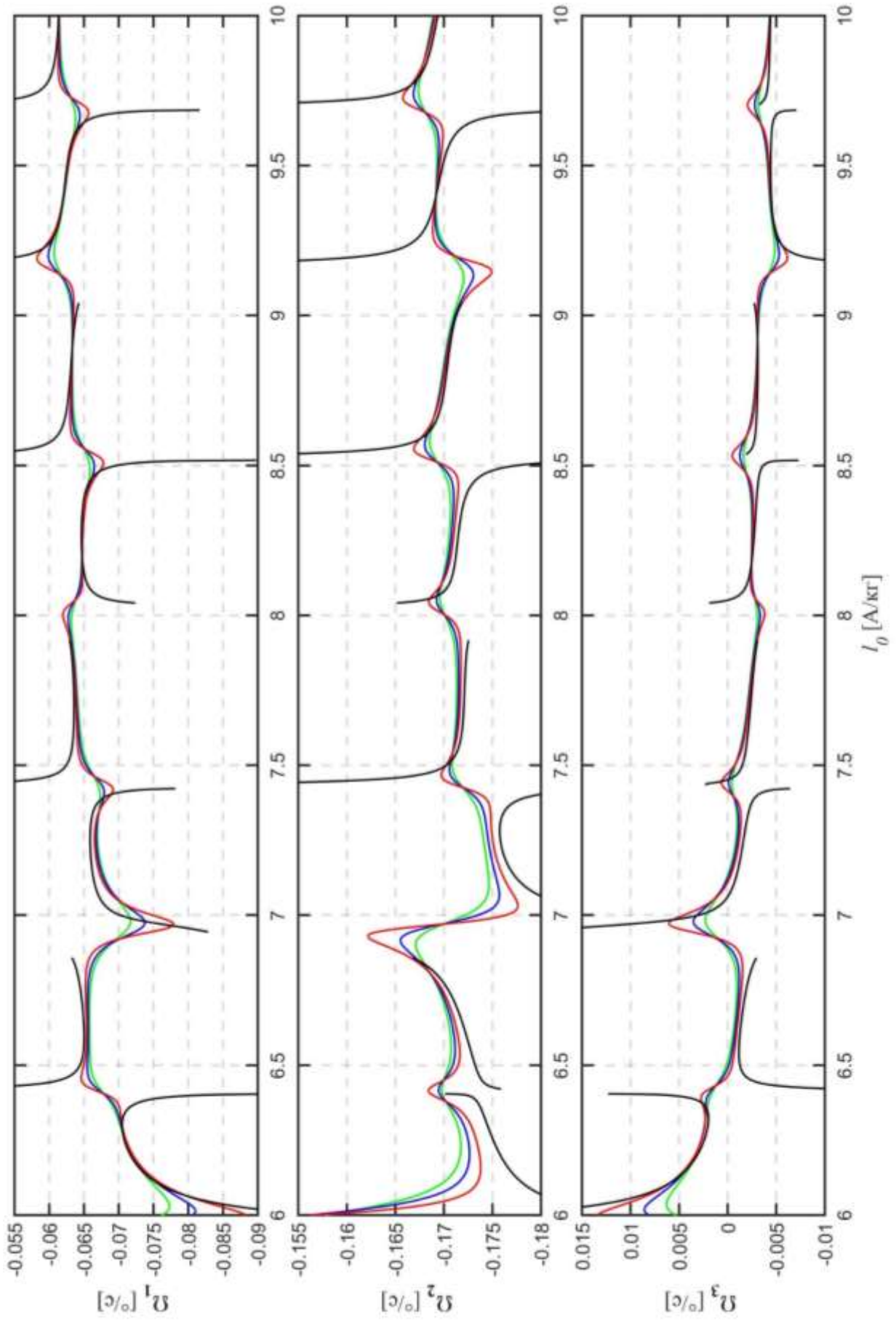


Рис. 2.25. Начальные условия решений краевой задачи (2.1'), (2.3) при $\Omega_G = 11.67^\circ$; компоненты вектора $\Omega(0)$.

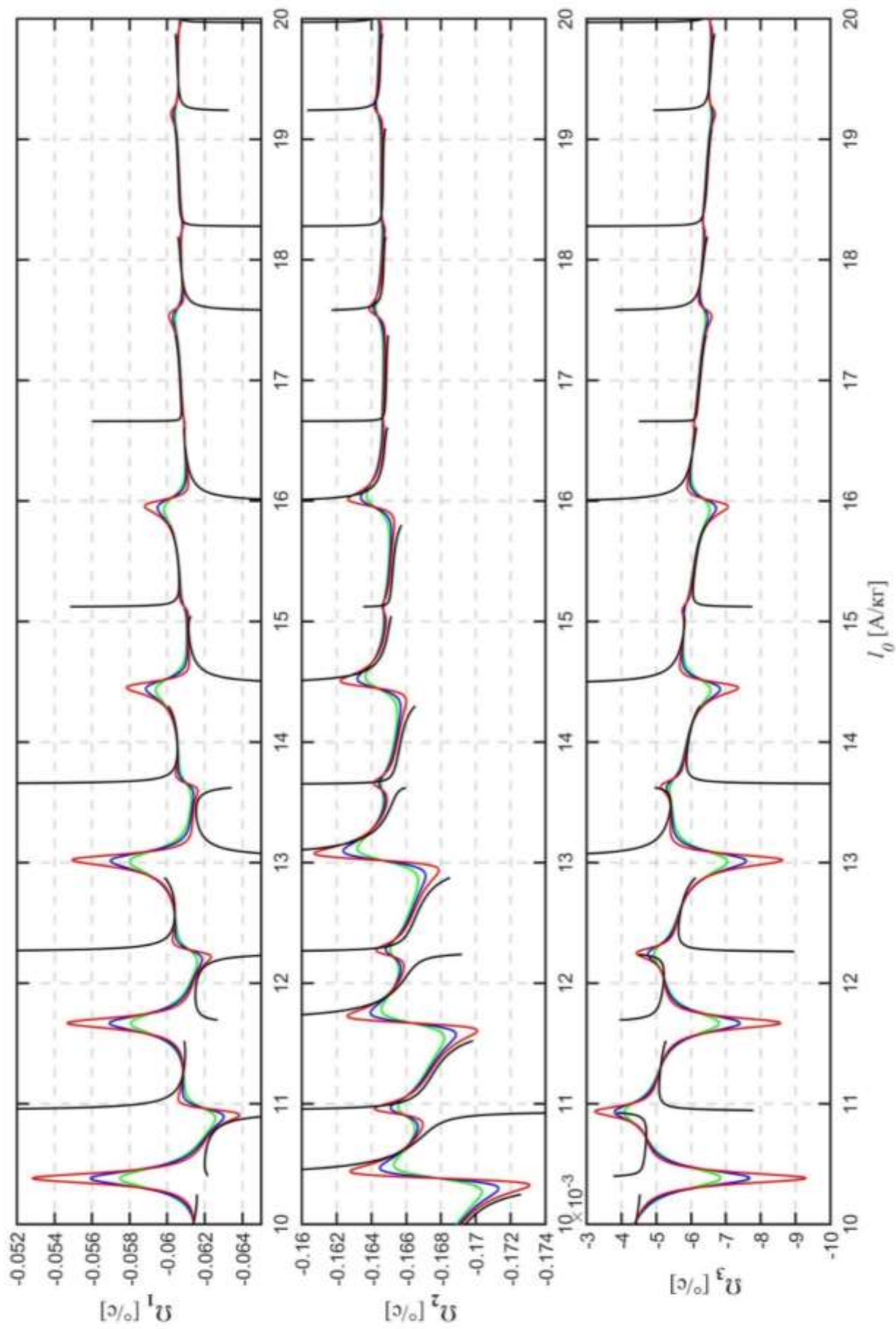


Рис. 2.26. Начальные условия решений краевой задачи (2.1'), (2.3) при $\Omega_G = 11.67^\circ$; компоненты вектора $\Omega(0)$.

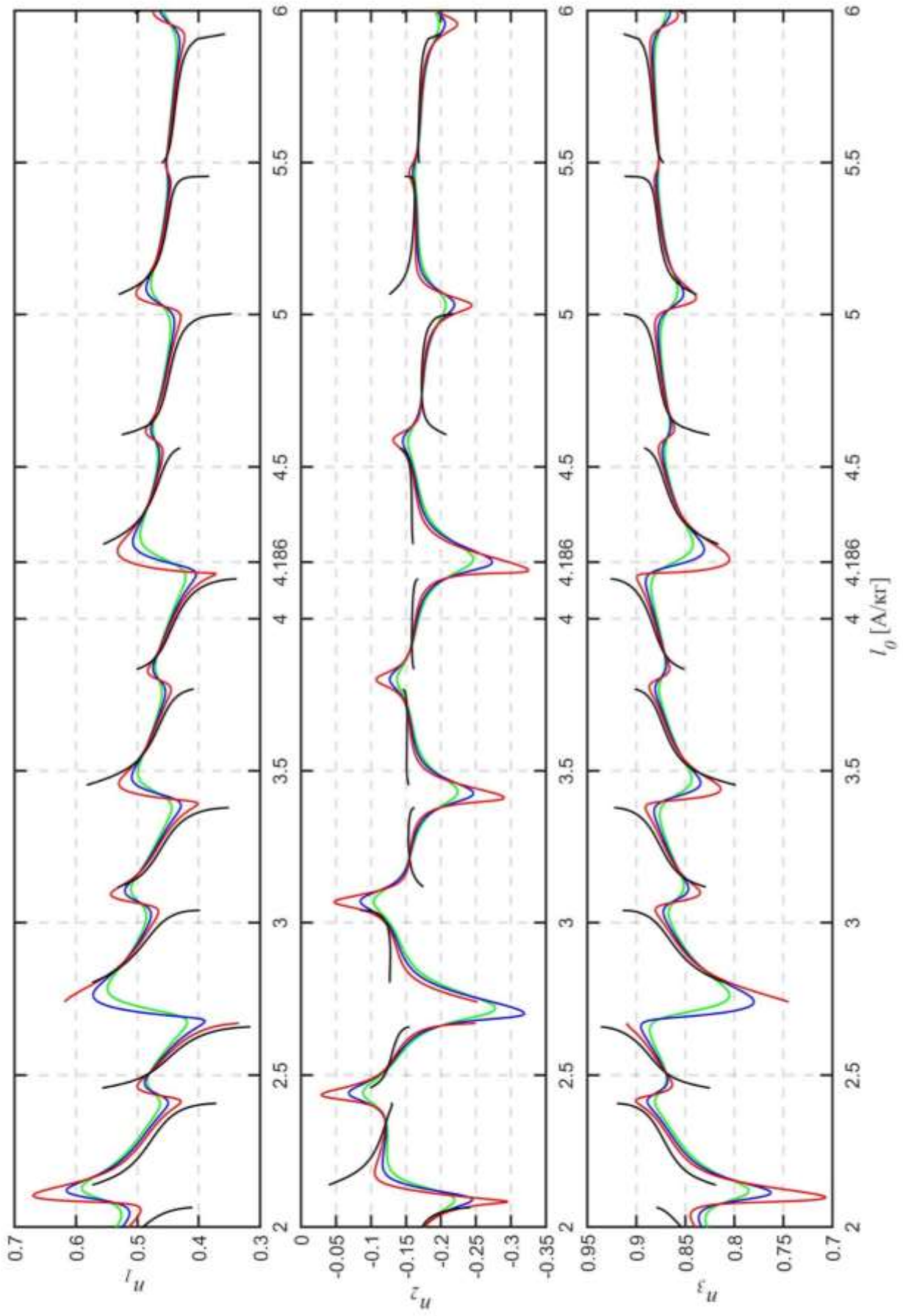


Рис. 2.27. Начальные условия решения краевой задачи (2.1'), (2.3) при $\Omega_G = 11.67^\circ$: компоненты орта $\mathbf{n}(0)$.

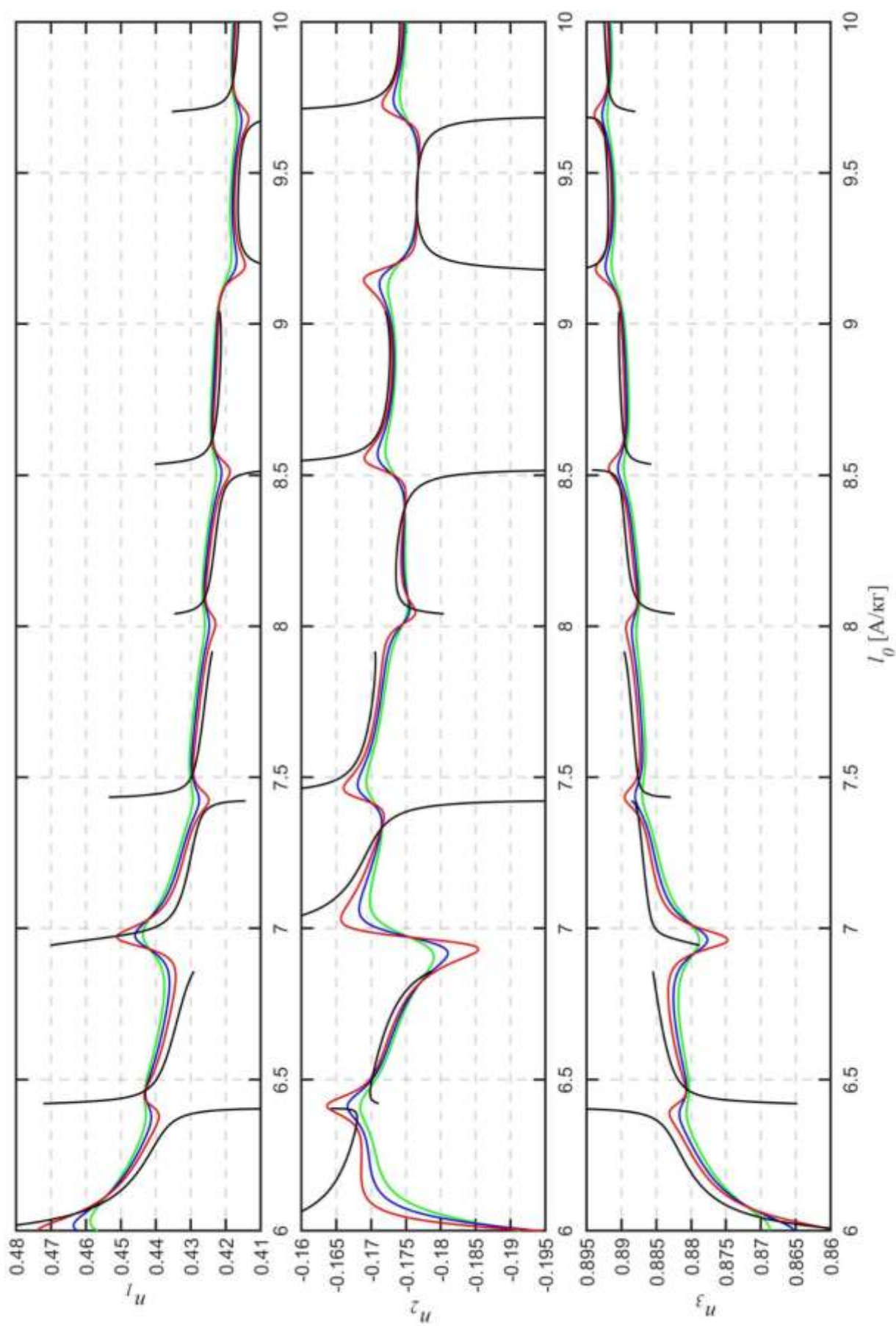


Рис. 2.28. Начальные условия решений краевой задачи (2.1'), (2.3) при $\Omega_G = 11.67^\circ$; компоненты орта $\mathbf{n}(0)$.

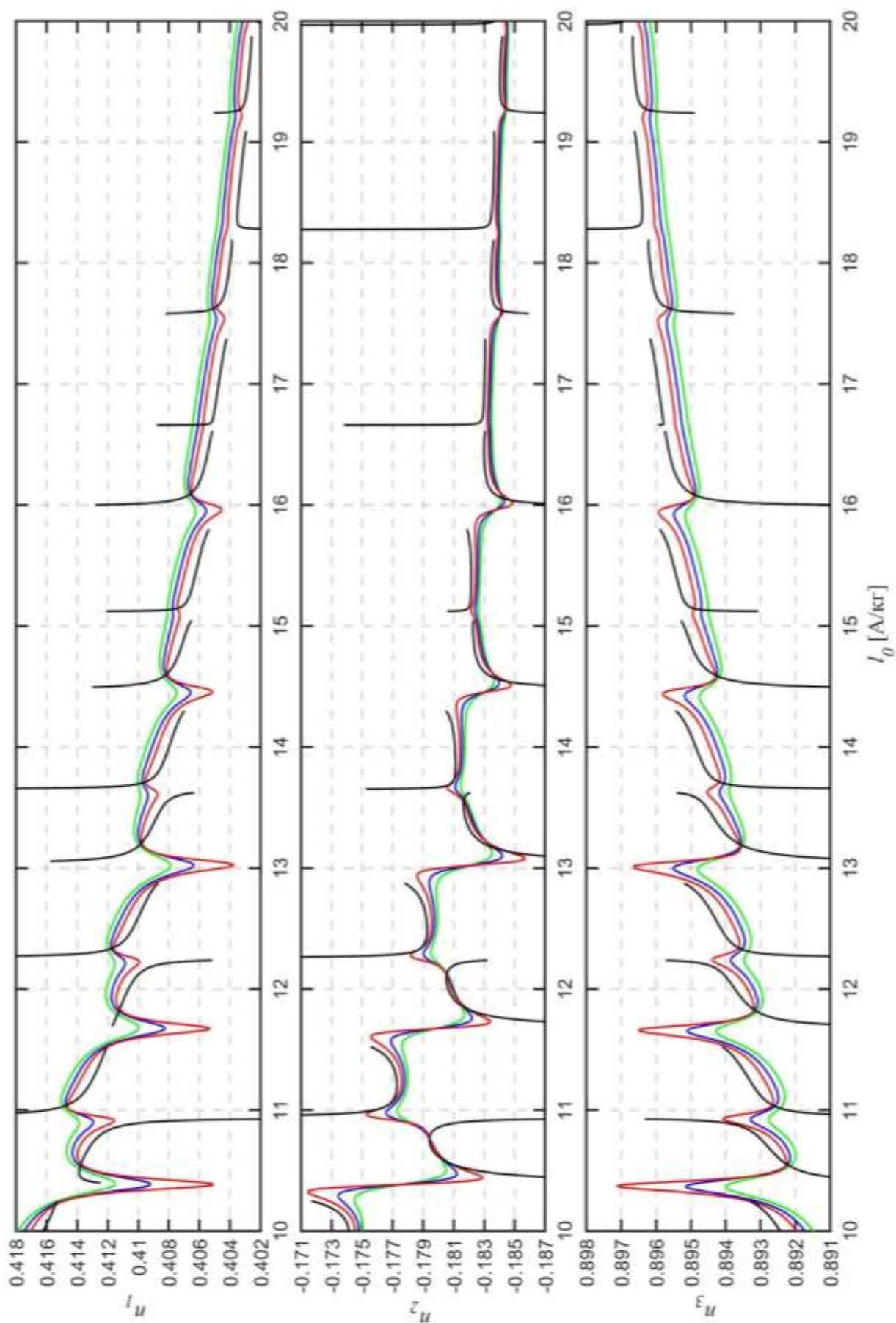


Рис. 2.29. Начальные условия решений краевой задачи (2.1'), (2.3) при $\Omega_G = 11.67^\circ$; компоненты орта $\mathbf{n}(0)$.

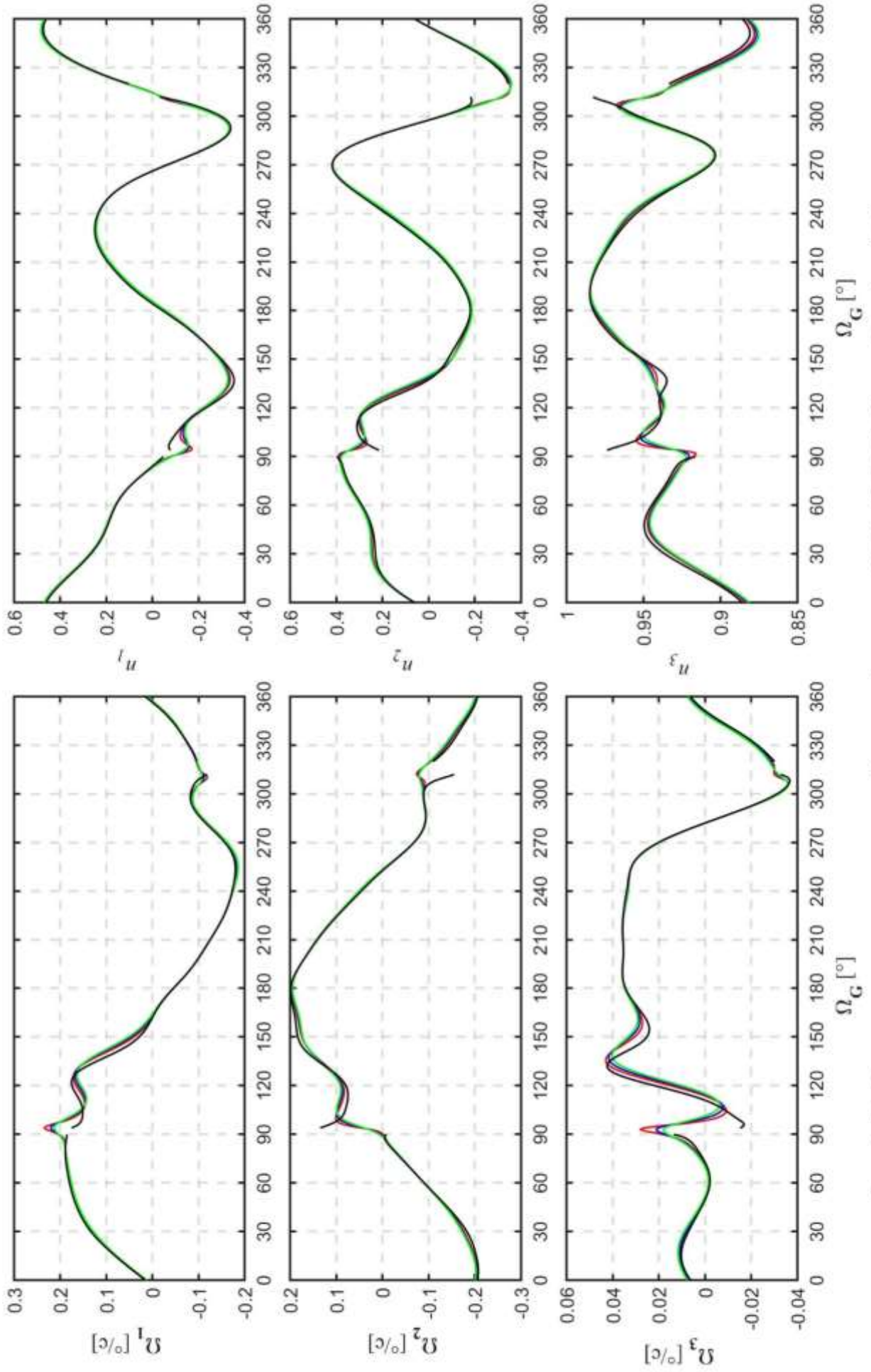


Рис. 2.30. Начальные условия решения краевой задачи (2.1'), (2.3) $\Omega(0)$ и $\mathbf{n}(0)$, $l_0 = 4 \text{ A/кг}$.

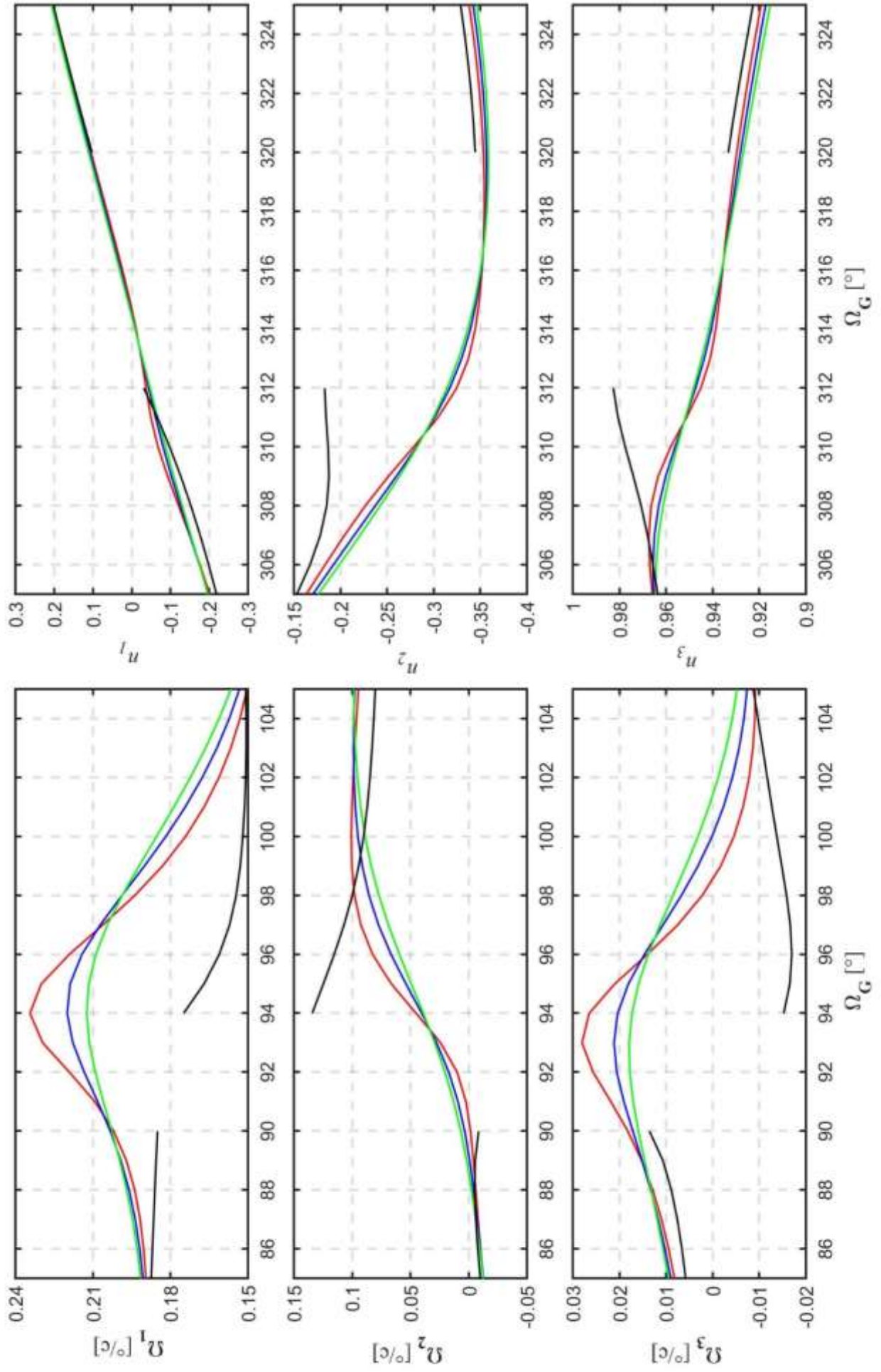


Рис. 2.31. Начальные условия решений краевой задачи (2.1'), (2.3) $\Omega(0)$ и $n(0)$, $l_0 = 4 \text{ A/кг}$.

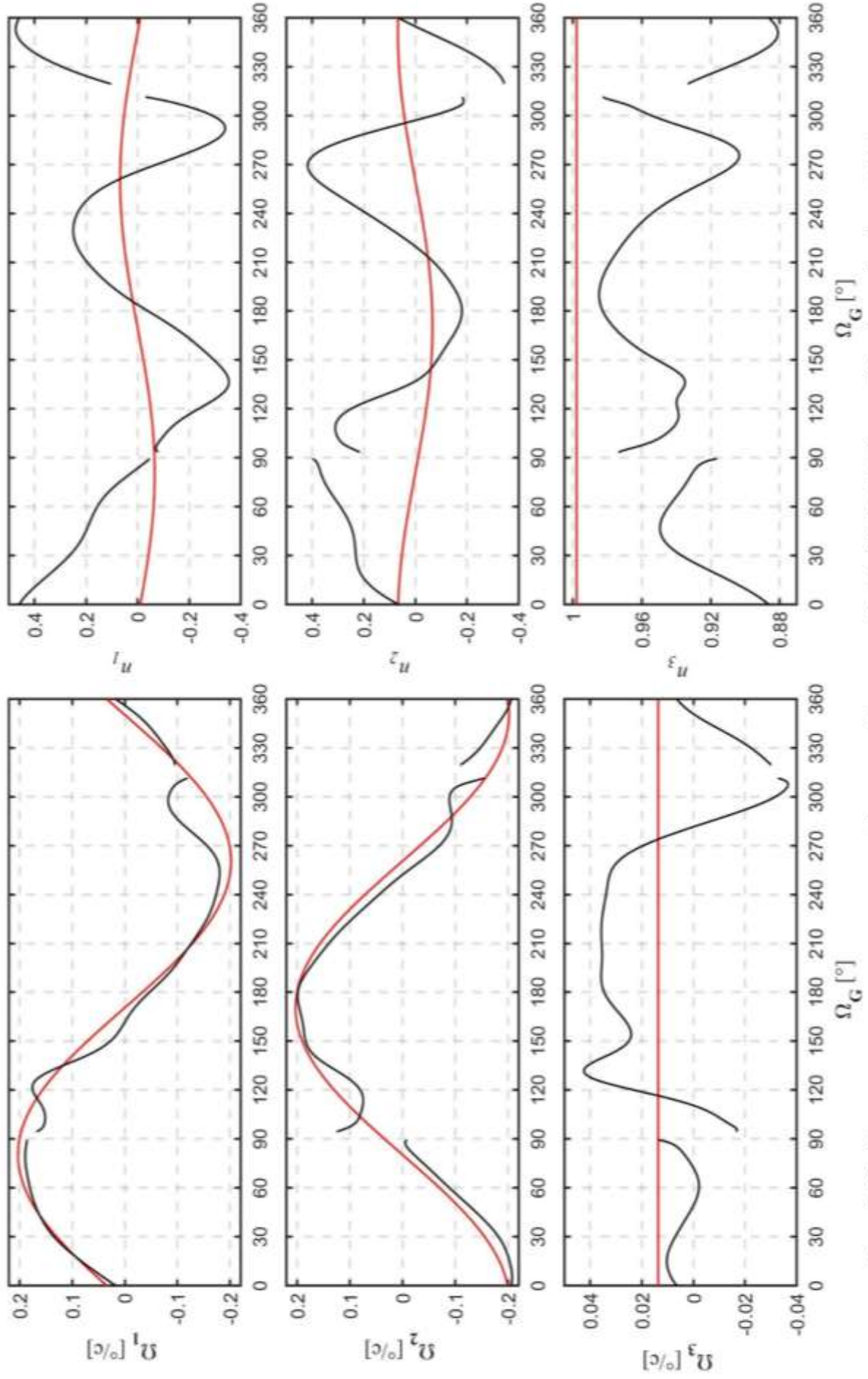


Рис. 2.32. Начальные условия решений краевой задачи (2.1'), (2.3) $\mathbf{\Omega}(0)$ и $\mathbf{n}(0)$, $k_\Omega = 0$, $I_0 = 4 \text{ A/kg}$.
 Модель МПЗ: IGRF – черные линии, прямой диполь – красные линии.

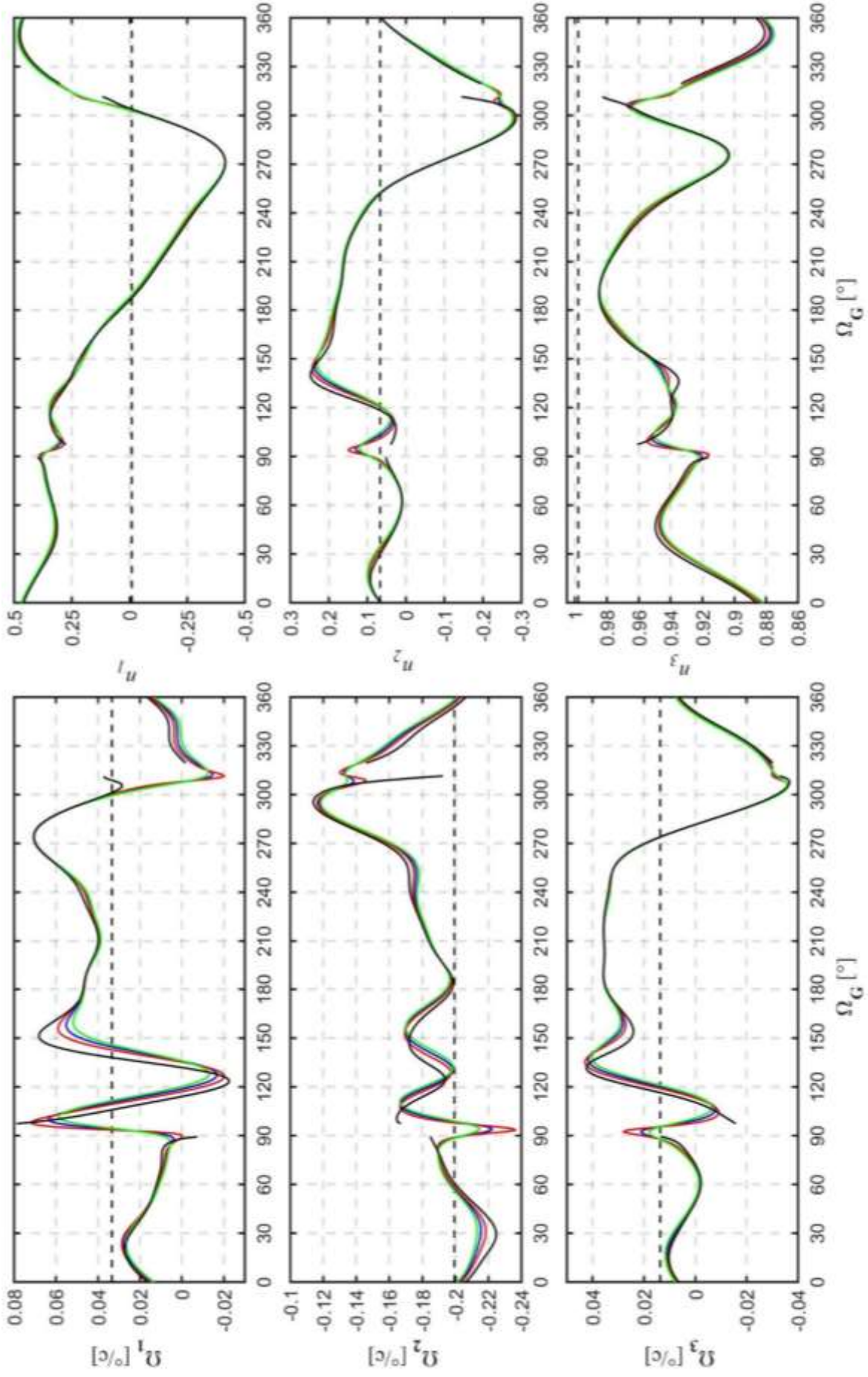


Рис. 2.33. Начальные условия решений краевой задачи (2.1'), (2.3), пересчитанные в узловые системы координат, $l_0 = 4 \text{ A/кг}$. Модель МПЗ: IGRF ($k_G = 0 \div 0.0002 \text{ c}^{-1}$) – сплошные линии, прямой диполь ($k_G = 0$) – пунктирные линии.

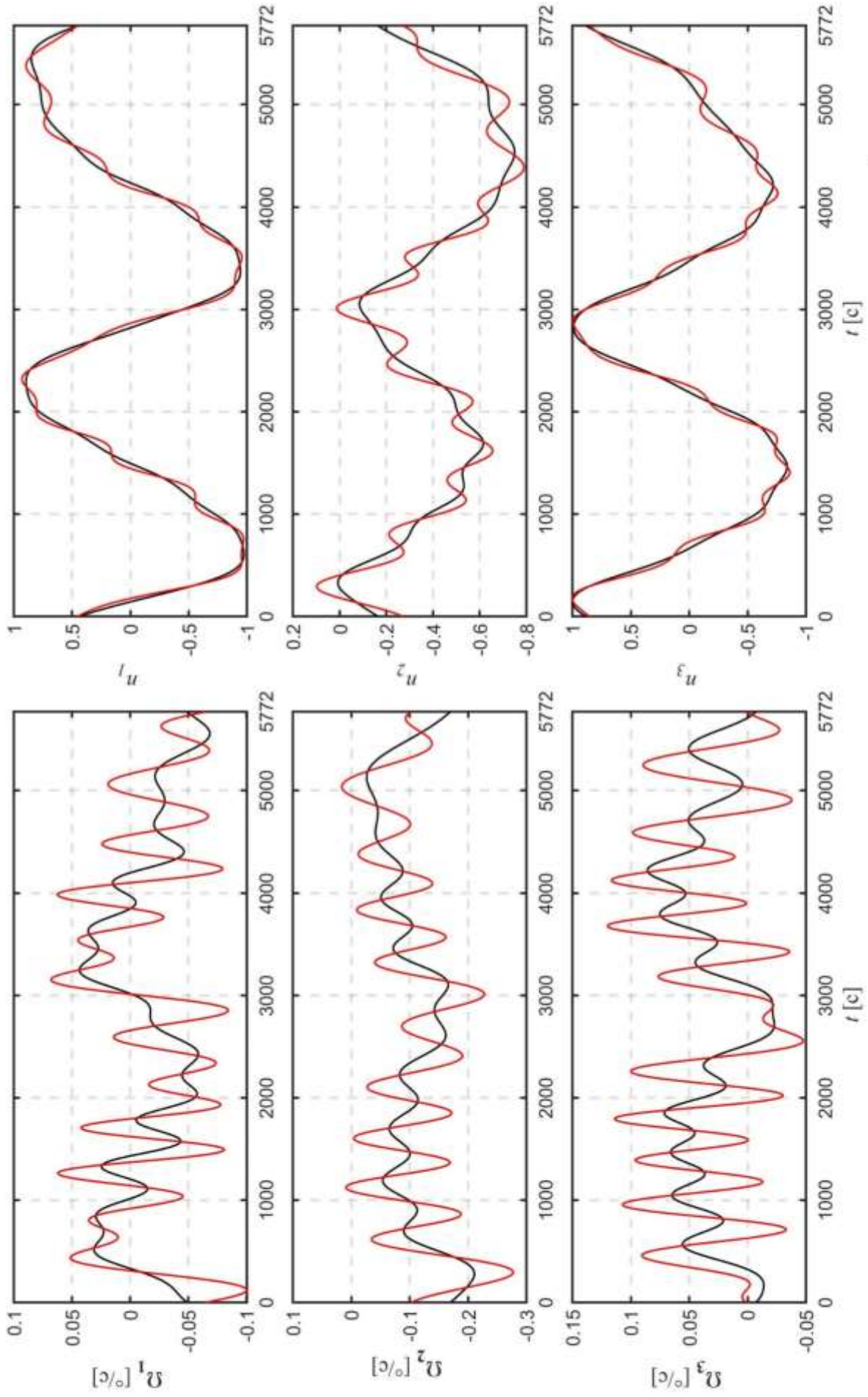


Рис. 2.34. Решение краевой задачи (2.1'), (2.3): компоненты вектора $\Omega(t)$ и орга $\mathbf{n}(t)$ при $k_\Omega = 0.00015 \text{ c}^{-1}$, $\Omega_G = 11.67^\circ$, $l_0 = 4 \text{ A/kg}$ (черные линии), $l_0 = 4.186 \text{ A/kg}$ (красные линии).

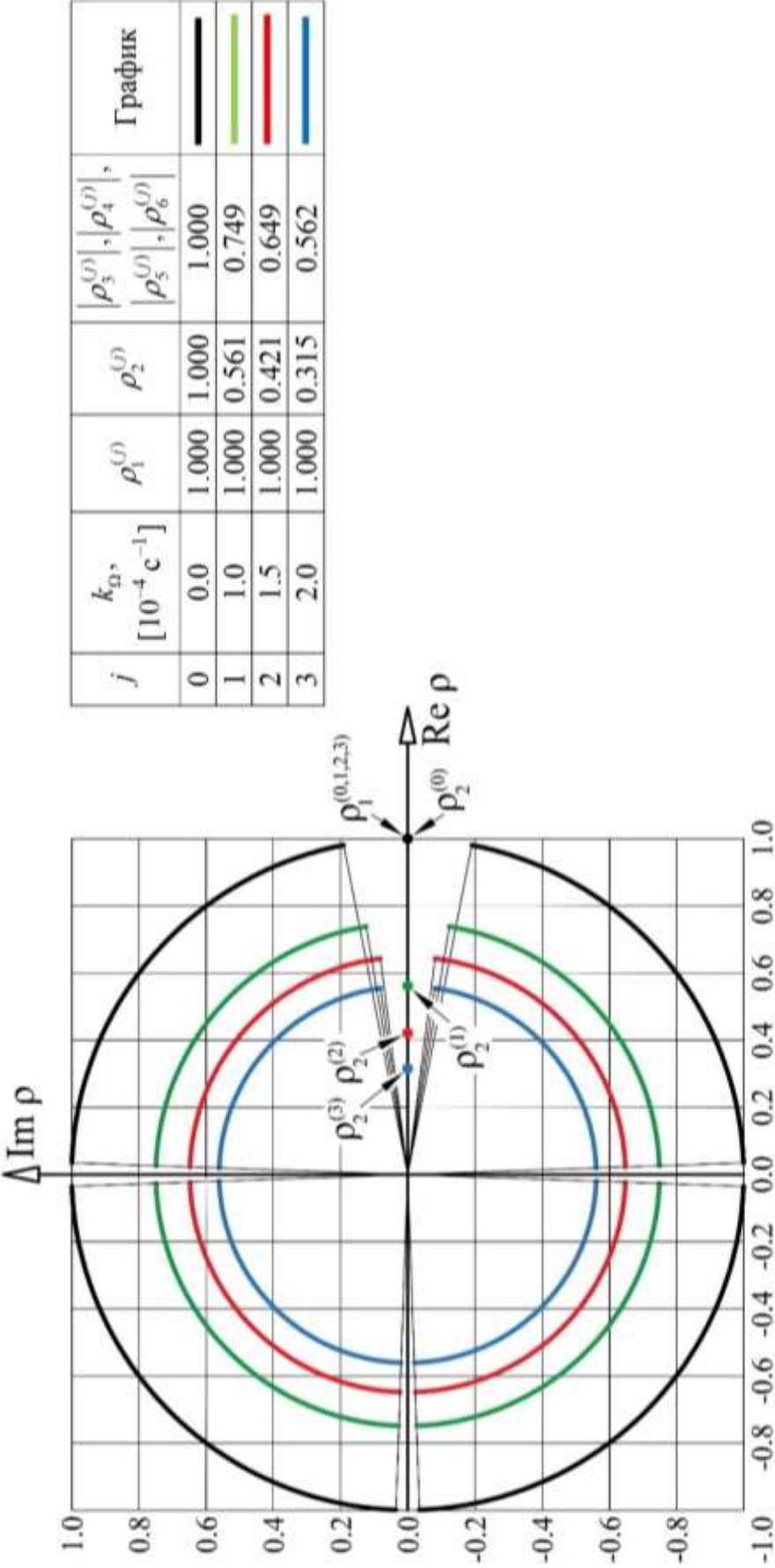


Рис. 2.35. Схема расположения мультипликаторов системы (2.1').

Глава 3. Прогнозирование и оценка минимального уровня микроускорений на борту космического аппарата

Значительную часть исследований проводимых в космосе представляют собой эксперименты в области микроускорений. В данной главе описывается методика прогнозирования и оценки минимального уровня микроускорений, возникающих на борту вновь создаваемого или уже существующего КА с целью определения возможных условий для проведения экспериментов, мест установки научной аппаратуры и выбора режимов углового движения КА.

3.1 Уравнения углового движения космического аппарата

Космический аппарат считаем гироскопом, центр масс которого движется по геоцентрической орбите. Уравнения движения КА состоят из двух подсистем (см. п. 1.3). Для записи уравнений углового движения КА и представления полученных результатов используется связанная система координат $Ox_1x_2x_3$. В этой главе и далее в работе, если не оговорено особо, координаты точек и компоненты всех векторов относятся к системе $Ox_1x_2x_3$. Подсистема уравнений углового движения образована уравнениями, описывающими теорему об изменении кинетического момента КА в движении относительно центра масс (1.4) и уравнениями Пуассона для элементов матрицы перехода W (1.8). В уравнениях кинетического момента учитываются гравитационный $\mathbf{M}_g$ (1.5) и аэродинамический $\mathbf{M}_a$ (1.6) моменты.

Подсистему уравнений углового движения запишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{d}k_1}{dt} &= \mu(\omega_2\omega_3 - \nu\eta_2\eta_3) + (h_2\omega_3 - h_3\omega_2 + m_{a1}), \\ \frac{\tilde{d}k_2}{dt} &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - \nu\eta_1\eta_3) + \frac{\lambda}{1+\lambda\mu}(h_3\omega_1 - h_1\omega_3 + m_{a2}), \\ \frac{\tilde{d}k_3}{dt} &= -(1-\lambda+\lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - \nu\eta_1\eta_2) + \lambda(h_1\omega_2 - h_2\omega_1 + m_{a3}),\end{aligned}\quad (3.1)$$

$$\omega_1 = k_1 - h_1, \quad \omega_2 = k_2 - \frac{\lambda h_2}{1 + \lambda \mu}, \quad \omega_3 = k_3 - \lambda h_3,$$

$$\lambda = I_1 / I_3, \quad \mu = (I_2 - I_3) / I_1, \quad m_{a1} = 0, \quad m_{a2} = p v_3 / I_1, \quad m_{a3} = -p v_2 / I_1.$$

Здесь ω_i и η_i – компоненты векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}$ соответственно, I_i – моменты инерции КА относительно осей Ox_i , k_i , h_i и m_{ai} – отнесенные к I_1 компоненты кинетического момента КА в его движении относительно центра масс, гиросtatического и аэродинамического моментов соответственно.

Одним из наиболее приемлемых режимов углового движения КА при проведении длительных экспериментов в области микрогравитации является режим пассивной орбитальной ориентации, близкой к гравитационно устойчивой.

3.2 Пассивная гравитационная ориентация космического аппарата

Чтобы пояснить этот режим углового движения, упростим уравнения (1.8), (3.1), отбросив некоторые второстепенные факторы. Предположим, что орбита КА – круговая и неизменна в абсолютном пространстве, на КА действует один лишь гравитационный момент и собственный кинетический момент гиросистемы (гиросtatический момент КА) равен нулю. В этом случае уравнения (3.1) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2 \omega_3 - 3\omega_0^2 u_{32} u_{33}), & \dot{\omega}_2 &= \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda \mu}(\omega_1 \omega_3 - 3\omega_0^2 u_{31} u_{33}), \\ \dot{\omega}_3 &= -(1 - \lambda + \lambda \mu)(\omega_1 \omega_2 - 3\omega_0^2 u_{31} u_{32}), & & (3.2) \\ \dot{\gamma} &= \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), & \dot{\delta} &= \frac{\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma}{\cos \beta} - \omega_0, \\ \dot{\beta} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma. \end{aligned}$$

Здесь ω_0 – среднее движение КА (орбитальная частота), величины u_{3i} выражаются через углы γ , δ и β по формулам (1.1).

Ограничимся рассмотрением 4 (из 24) стационарных решений системы

(3.2), задаваемых соотношениями

$$\sin \gamma = \sin \delta = \beta = 0, \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = \omega_0 \cos \gamma.$$

Эти решения описывают положения равновесия (покой) КА в орбитальной системе координат. Достаточные условия устойчивости по Ляпунову решений (3.2) выражаются неравенствами [159]: $\lambda < 1$, $\mu > 0$, $1 - \lambda + \lambda\mu > 0$. Для рассматриваемых в п. 1.3 параметров КА $\lambda = 0.238$ и $\mu = 0.077$ указанные выше условия выполняются.

Каждое устойчивое стационарное решение уравнений (3.2) реализует режим трехосной гравитационной ориентации. В этом режиме КА совершает полет подобно Луне (пример гравитационной ориентации естественного небесного тела), будучи одной своей стороной неизменно обращен к Земле. Такой режим может быть удобен при неуправляемом полете КА. Для определенности сузим набор возможных движений и ниже будем рассматривать только стационарное решение $\mathbf{e}_1 = -\mathbf{E}_3$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_2$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_1$, которое можно записать в виде

$$\gamma = \delta = \beta = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 - \omega_0 = \omega_3 = 0. \quad (3.3)$$

В этом решении оси Ox_1 и Ox_2 совпадают с осями $-OX_3$ и OX_2 соответственно.

Уравнения (1.8), (3.1) не имеют решений, описывающих покой КА в орбитальной системе координат, однако в силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий и параметров эти уравнения допускают решения, которые после пересчета переменных u_{1i} и u_{2i} в углы γ , δ и β будут близки положению покоя (3.3). Чтобы движения КА, описываемые такими решениями, были приемлемы для исследований в области микрогравитации, они должны существовать продолжительное время и мало отклоняться от (3.3). Удовлетворить этим требованиям можно выбирая решения уравнений (1.8), (3.1) из условия минимума функционала

$$\Phi = \int_0^T |\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2|^2 dt, \quad (3.4)$$

Здесь значение T равно нескольким орбитальным периодам $2\pi/\omega_0$. Чтобы пояснить смысл функционала (3.4), представим его в эквивалентной форме

$$\Phi = \int_0^T \sum_{i=1}^3 (\omega_i - \omega_0 u_{2i})^2 dt.$$

Теперь его можно рассматривать и на решениях системы (3.2), полагая величины u_{2i} выраженными в функции углов γ , δ и β по формулам (1.1). В частности, $\Phi = 0$ для положения покоя (3.3) и $\Phi > 0$ на решениях, лежащих в окрестности этого положения и не совпадающих с ним. Интеграл в (3.4) можно заменить суммой

$$\Phi' = \sum_{n=0}^{N-1} |\omega(n\tau) - \omega_0 \mathbf{E}_2(n\tau)|^2, \quad \tau = \frac{T}{N},$$

где N – достаточно большое число.

Рассмотрим пример построения режима пассивной гравитационной ориентации. Приведем использованные в расчетах числовые значения параметров описанной модели. Геометрические и массово-инерционные параметры КА указаны в п. 1.3, при численном интегрировании уравнений движения центра масс КА в данной главе в качестве начальных условий использовались параметры **Орбиты II**.

Минимизация Φ' по начальным условиям решения системы (1.8), (3.1) проводилась методом Гаусса-Ньютона. Для расчета частных производных решения по начальным условиям интегрировались соответствующие уравнения в вариациях, в которых отбрасывались члены, характеризующие аэродинамический момент. В описываемых расчетах были взяты $T = 4\pi / \omega_0(0)$, $N = 80$.

Решения уравнений (1.8), (3.1), доставляющие локальный минимум функционалу Φ' и близкие положению покоя (3.3) представлены на рис. 3.1, 3.2. Здесь приведены графики зависимости от времени углов γ , δ , β и компонент угловой скорости ω_i , $i = \overline{1,3}$. Положение КА в орбитальной системе координат в момент времени $t = 0$ задается углами $\gamma = 0.06^\circ$, $\delta = 1.34^\circ$, $\beta = -0.07^\circ$. Начальная угловая скорость КА: $\omega_1 = -1.35 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ/\text{с}$, $\omega_2 = 0.0655 \text{ }^\circ/\text{с}$,

$\omega_3 = 8.68 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ / \text{с}$. Графики построены на интервале времени 8 суток. Слабая неустойчивость режимов пассивной гравитационной ориентации (см. графики функции $\gamma(t)$ и $\beta(t)$) связана с дестабилизирующим действием аэродинамического момента. Колебания КА вызваны изменением плотности атмосферы и эллиптичностью орбиты. В полной мере использовать возможности режима пассивной гравитационной ориентации не удастся из-за неизбежных ошибок в задании начальных условий. Эти ошибки приводят к колебаниям в окрестности требуемого движения, амплитуда которых возрастает из-за дестабилизирующего действия аэродинамического момента.

3.3. Орбитальная ориентация космического аппарата

Орбитальной ориентацией КА будем называть его положение покоя в орбитальной системе координат. Орбитальная ориентация наиболее удобна для проведения космических экспериментов по росту кристаллов. Удобство обусловлено тем, что в этом режиме, во-первых, вектор остаточного микроускорения остается практически постоянным и ориентированным строго определенным образом в системе координат $Ox_1x_2x_3$; во-вторых, накопление кинетического момента гиросистемы происходит медленно – в указанном положении гравитационный момент равен нулю, а аэродинамический момент мал. При таком способе орбитальной ориентации энергопотребление с солнечных батарей КА, как правило, невелик [40], что сужает область его применения.

Чтобы замкнуть подсистему уравнений углового движения, надо добавить к уравнениям (1.8), (3.1) уравнения, описывающие изменение переменных h_i . Эти уравнения запишем в виде

$$\dot{h}_1 = h_2\omega_3 - h_3\omega_2 - m_1, \quad \dot{h}_2 = h_3\omega_1 - h_1\omega_3 - m_2, \quad \dot{h}_3 = h_1\omega_2 - h_2\omega_1 - m_3, \quad (3.4)$$

где m_i – отнесенные к I_1 компоненты управляющего момента $\mathbf{M}_c$, приложенного к корпусу КА со стороны гиросистемы. Подставим уравнения (3.4) в первые три уравнения системы (3.1) и получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - v\eta_2\eta_3) + m_1, \\
\dot{\omega}_2 &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - v\eta_1\eta_3) + \frac{\lambda}{1+\lambda\mu}(m_2 + m_{a2}), \\
\dot{\omega}_3 &= -(1-\lambda+\lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - v\eta_1\eta_2) + \lambda(m_3 + m_{a3}).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Рассматривая систему уравнений (3.5) выберем управляющий момент так, чтобы уравнения (1.8), (3.1), (3.4) допускали установившиеся решения, в которых с высокой точностью матрица U была бы близка к постоянно заданной матрице U_0 , а величины $|h_i|$ возрастали бы по возможности медленнее. Такой момент будем искать в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_c &= -\xi^2 \hat{I} \boldsymbol{\theta} - 2\xi \hat{I}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2), \\
m_1 &= -\xi^2 \mathcal{G}_1 - 2\xi(\omega_1 - \omega_0 u_{21}), \quad m_2 = -\frac{1+\lambda\mu}{\lambda} \left[\xi^2 \mathcal{G}_2 + 2\xi(\omega_2 - \omega_0 u_{22}) \right], \\
m_3 &= -\frac{1}{\lambda} [\xi^2 \mathcal{G}_3 + 2\xi(\omega_3 - \omega_0 u_{23})],
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где $\hat{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$, ξ – положительный параметр, $\omega_0 \mathbf{E}_2 = (\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03})^T$, $\omega_{0i} = \omega_0 u_{2i}$ – компоненты угловой скорости орбитальной системы координат, $i = \overline{1, 3}$, $\boldsymbol{\theta} = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3)^T$ – вектор, компоненты которого определены соотношением

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{G}_3 & \mathcal{G}_2 \\ \mathcal{G}_3 & 0 & -\mathcal{G}_1 \\ -\mathcal{G}_2 & \mathcal{G}_1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (U_0^T U - U^T U_0), \tag{3.7}$$

матрица U_0 – задает требуемое (номинальное) положение КА в орбитальной системе координат. В случае $|\boldsymbol{\theta}| \ll 1$ вектор $\boldsymbol{\theta}$ играет роль вектора бесконечно малого поворота, и выполнено соотношение $\omega_i - \omega_{0i} \approx \dot{\mathcal{G}}_i$, $i = \overline{1, 3}$. Выписанные соотношения подразумевает, что на КА установлены датчики угловых скоростей и ориентации, в соответствии с показаниями которых формируется закон изменения собственного кинетического момента гиросистемы (3.4), (3.6).

Рассмотрим систему (3.4) – (3.7) вместе с кинематическими уравнениями

(1.8). Параметр ξ возьмем настолько большим, чтобы характерное время действия на КА управляющего момента было существенно меньше аналогичного времени для гравитационного и аэродинамического моментов. Если двумя последними моментами пренебречь, принять орбиту круговой, а величину θ малой, то эту систему, линеаризовав ее по θ , можно привести к виду

$$\ddot{\theta} + 2\xi\dot{\theta} + \xi^2\theta = 0.$$

Выписанное векторное уравнение асимптотически устойчиво. Следовательно, асимптотически устойчив и режим орбитальной ориентации. При подходящем выборе параметра ξ возмущенное движение КА в окрестности положения покоя $U = U_0$ будет затухать за требуемое время.

Закон управления (3.6) обеспечивает реализацию режима орбитальной ориентации КА, но в общем случае не обеспечивает малый рост величин $|h_i|$. Последнее свойство обеспечивается специальным выбором матрицы U_0 . Приемлемое значение этой матрицы можно получить, усредняя на отрезке $0 \leq t \leq T$ значения $U(t)$, полученные для режима пассивной гравитационной ориентации посредством минимизации функционала Φ' . Усреднение здесь означает отыскание ортогональной матрицы U_0 , доставляющей минимум функционалу

$$\Psi = \int_0^T \text{tr}([U(t) - U_0]^T [U(t) - U_0]) dt. \quad (3.8)$$

В режиме пассивной гравитационной ориентации $U(t) \approx U_0$, и с помощью вектора θ выписанный функционал можно представить в виде

$$\Psi \approx 2 \int_0^T [\mathcal{G}_1^2(t) + \mathcal{G}_2^2(t) + \mathcal{G}_3^2(t)] dt.$$

Отыскание матрицы U_0 посредством минимизации выражения (3.8) сводится к задаче на условный экстремум. При ее решении необходимо учитывать условия ортогональности разыскиваемой матрицы

$$U_0 U_0^T = E_3 = \text{diag}(1, 1, 1) \quad (3.9)$$

и равенство $\det U_0 = 1$. Способ решения такого рода задач хорошо известен (см., например, [161]). Он использует метод неопределенных множителей Лагранжа. Составляется функция $\Psi + \text{tr} \Lambda (U_0 U_0^T - E_3)$, где Λ – симметричная матрица, составленная из множителей Лагранжа, и выписываются условия ее безусловного экстремума:

$$\Lambda U_0 = \int_0^T U(t) dt \equiv S. \quad (3.10)$$

Чтобы решить систему (3.9), (3.10), рассмотрим сингулярное разложение матрицы S : $S = PDR^T$. Здесь P и R – ортогональные матрицы порядка 3, $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$, $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq 0$. Полагаем, что $d_3 > 0$, т. е. матрица S не вырождена. Введем матрицу $F = \text{diag}(f_1, f_2, f_3)$, $f_i = \pm 1$, $i = \overline{1, 3}$, но выбор знаков пока не фиксируем. На основании сингулярного разложения S запишем $S = PDF^2 R^T = PDFP^T PFR^T$. Возьмем $U_0 = PFR^T$, $\Lambda = PDFP^T$. Это наиболее общий вид матриц U_0 и Λ , удовлетворяющих системе (3.9), (3.10).

Чтобы выбрать матрицу U_0 , доставляющую Ψ минимум и удовлетворяющую условию $\det U_0 = 1$, рассмотрим соотношения

$$\det PFR^T = f_1 f_2 f_3 \det P \det R,$$

$$\Psi = 6 - 2\text{tr} U_0^T S = 6 - 2\text{tr} RFP^T PDR^T = 6 - 2\text{tr} FD = 6 - 2(d_1 f_1 + d_2 f_2 + d_3 f_3).$$

Ясно, что надо положить $f_1 = f_2 = 1$, $f_3 = \det P \det R$. Окончательное выражение для U_0 имеет вид

$$U_0 = P \text{diag}(1, 1, \det P \det R) R^T.$$

Покажем, что выбранный закон изменения кинетического момента гиросистемы действительно обеспечивает орбитальную ориентацию КА и малый рост величин $|h_i|$. С этой целью вычислим решение системы (1.8), (3.1), (3.4), (3.6) при $\xi = 0.01 \text{ с}^{-1}$ со следующими начальными условиями. Положение

КА в орбитальной системе координат в момент времени $t=0$ задается углами $\gamma = -0.002^\circ$, $\delta = 0.890^\circ$, $\beta = -0.005^\circ$. Эти углы отвечают матрице U_0 , которая получена усреднением матрицы $U(t)$ на интервале 2 суток в режиме пассивной гравитационной ориентации (п. 3.2, рис. 3.1, 3.2). Начальные условия для переменных h_i возьмем нулевые. Тогда начальные условия для переменных k_i будут совпадать с начальными значениями ω_i . Последние выберем так, чтобы учесть ошибки в их реализации (при выставке начальных условий углового движения КА ошибка в задании угловой скорости наиболее существенна), а именно положим

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) - \omega_0 = \omega_3(0) = 0.01^\circ / \text{с}. \quad (3.11)$$

Результаты расчетов движения КА, полученные в рамках принятой модели приведены на рис 3.3 – 3.5. Эти результаты представлены графиками зависимости от времени углов γ , δ , β , компонент угловой скорости ω_i , компонент гиросtatического момента $H_i = I_1 h_i$, $i = \overline{1,3}$ и его модуля $|\mathbf{H}|$. Графики построены на интервалах времени 8 суток. В левой части рисунков в укрупненном масштабе изображен начальный участок каждого графика, иллюстрирующий переходной процесс. В данном примере этот процесс обусловлен ошибками в задании начальной угловой скорости. Графики в правой части рисунков иллюстрируют движение КА в установившемся режиме после окончания переходного процесса. Колебания КА в установившемся режиме вызваны изменением плотности атмосферы вдоль орбиты и эллиптичностью последней. Следует отметить весьма медленное накопление собственного кинетического момента гиросистемы в построенном решении. Это – следствие специального выбора матрицы U_0 .

Для сравнения на рис. 3.6 – 3.8 приведены аналогичные графики, полученные в результате интегрирования системы (1.8), (3.1), (3.4) с законом управления

$$\mathbf{M}_c = \xi^2 \hat{I}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \times \mathbf{e}_1) - 2\xi \hat{I}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2), \quad (3.12)$$

$$m_1 = \xi^2 u_{23} - 2\xi(\omega_1 - \omega_0 u_{21}), \quad m_2 = -\frac{1 + \lambda\mu}{\lambda} \left[-\xi^2 u_{33} + 2\xi(\omega_2 - \omega_0 u_{22}) \right],$$

$$m_3 = -\frac{1}{\lambda} [\xi^2 (u_{21} + u_{32}) + 2\xi(\omega_3 - \omega_0 u_{23})].$$

Этот закон – вариант закона (3.6) с матрицей U_0 , задаваемой углами γ , δ и β из (3.3). Он обеспечивает орбитальную ориентацию КА в окрестности положения равновесия (3.3). Интегрирование проводилось для начальных условий (3.11) и $\gamma(0) = \delta(0) = \beta(0) = 0$, $h_1(0) = h_2(0) = h_3(0) = 0$ при $\xi = 0.01 \text{ с}^{-1}$. Сравнивая полученные результаты видно, что использование закона управления (3.6) при подходящем выборе матрицы U_0 позволяет уменьшить величину накопленного за 8 суток полета гиросtatического момента КА примерно в 23 раза по сравнению с гиросtatическим моментом накопленным за аналогичный период времени при использовании закона (3.12), реализующего «точную» орбитальную ориентацию КА.

В данном случае использование матрицы U_0 представляет методический интерес. Расчет ее изменения в реальном времени сложен хотя бы из-за необходимости учета влияние аэродинамического момента на угловое движение КА.

Результаты расчетов микроускорений в режиме орбитальной ориентации КА при использовании закона управления (3.6) показаны на рис. 3.9, 3.10. Эти результаты представлены графиками зависимости от времени компонент составляющих микроускорений $\mathbf{b}_r = (b_{r1}, b_{r2}, b_{r3})^T$, $\mathbf{b}_a = (b_{a1}, b_{a2}, b_{a3})^T$, $\mathbf{b}_g = (b_{g1}, b_{g2}, b_{g3})^T$, их модулей $|\mathbf{b}_r|$, $|\mathbf{b}_a|$, $|\mathbf{b}_g|$, а также компонент суммарных микроускорений $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ и их модуль $|\mathbf{b}|$. Все составляющие микроускорений рассчитаны по формулам представленным в п. 1.5 в точке P , координаты которой приведены там же. Из графиков, приведенных на рис. 3.9 видно, что наибольший вклад в суммарные микроускорения $|\mathbf{b}|$ вносит гравитационная составляющая $|\mathbf{b}_g|$, уменьшить влияние которой можно

только увеличив высоту орбиты КА. В данном примере наименьший вклад носит аэродинамическая составляющая $|\mathbf{b}_a|$, которая зависит от геометрии корпуса КА и его ориентации в орбитальной системе координат. На рис. 3.10 показаны графики компонент суммарных микроускорений b_i , $i = \overline{1,3}$ из которых видно, что область вариации вектора $\mathbf{b}$ достаточно небольшая, что обусловлено выбранной ориентацией КА относительно осей орбитальной системы координат, близкой к (3.3).

Доминирующая частота установившихся колебаний величин b_i , $i = \overline{1,3}$, $|\mathbf{b}|$, показанных на рис 3.10, равна орбитальной частоте ω_0 .

Основные результаты главы 3

В этой главе продемонстрированы возможности методики прогнозирования и оценки минимального уровня микроускорений возникающих в заданной точке на борту КА. Рассматривался режим ориентации КА близкий к гравитационной, поскольку он является одним из наиболее приемлемых с точки зрения проведения экспериментов в области микроускорений. Как показано в п. 1.5 микроускорения на борту КА обусловлены в основном тремя причинами: гравитацией, аэродинамикой и угловым движением КА как твердого тела. Поскольку первые две причины зависят в основном от высоты орбиты КА, которая в данной работе считается заданной, то уменьшить уровень микроускорений на борту можно только за счет минимизации угловых скоростей движения КА относительно центра масс.

Оценка уровня микроускорений проводилась в несколько этапов. На первом этапе находились решения уравнений пассивного углового движения КА, доставляющие минимум функционалу (3.4) на интервале времени продолжительностью два орбитальных периода. В качестве начальных условий использовались соотношения (3.3). Функционал (3.4) не включает в себя функции углов ориентации КА от времени, для того чтобы найти решения с минимальными угловыми скоростями, а сам КА при этом принимает некоторое

равновесное положение под действием гравитационного и аэродинамического моментов [162, 163], близкое к (3.3).

Полученные значения углов γ , δ , β и компонент угловой скорости ω_i , $i = \overline{1,3}$, далее использовались в качестве начальных условий на следующем этапе, на котором находились усредненные значения матрицы ориентации КА U_0 , полученные для режима пассивной гравитационной ориентации на интервале времени 2 суток.

На последнем этапе найденная указанным выше образом матрица U_0 задавала требуемое положение КА при моделировании углового движения КА, управляемого с помощью гиросистемы. На интервале времени 8 суток были получены решения системы уравнений углового движения КА и рассчитаны микроускорения, которые далее в работе рассматривались как «эталонные». В данной главе закон управления использующий матрицу U_0 представляет методический интерес. Реализовать такое управление КА на практике крайне затруднительно, поскольку точно задать полученные начальные условия движения практически невозможно и расчет изменения матрицы U_0 в реальном времени сложен из-за необходимости учета влияния аэродинамического момента на угловое движение КА. Но это и не требуется, поскольку, как будет показано в главе 3, реализовать движение КА весьма близкое к «эталонному» можно другим способом.

Основные полученные результаты:

1. Для заданной орбиты движения центра масс построен режим стабилизации орбитальной ориентации КА, близкой к гравитационно устойчивой. Полученная орбитальная ориентация соответствует положению относительного равновесия КА под действием гравитационного и аэродинамического моментов.
2. Построенный режим стабилизации является «эталонным» с точки зрения уровня микроускорений, возникающих на борту КА, и скорости накопления собственного кинетического момента гиросистемы.
3. С помощью предложенной методики получены оценки минимального

уровня микроускорений на борту КА в точке, находящейся в рабочем отсеке на максимальном удалении от центра масс (для конкретных значений массово-инерционных и геометрических характеристик КА).

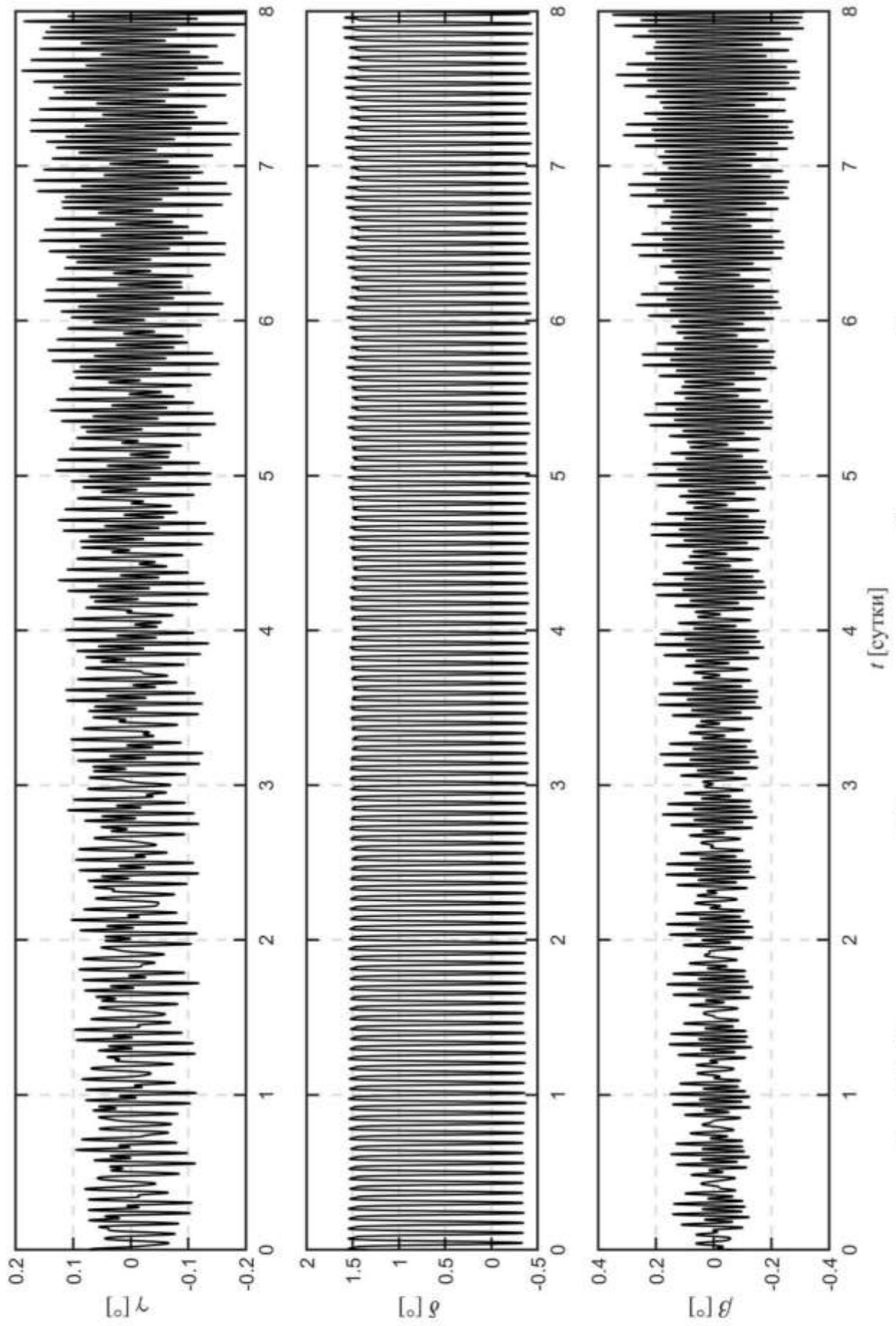


Рис. 3.1.1. Углы ориентации КА в режиме его пассивной гравитационной ориентации.

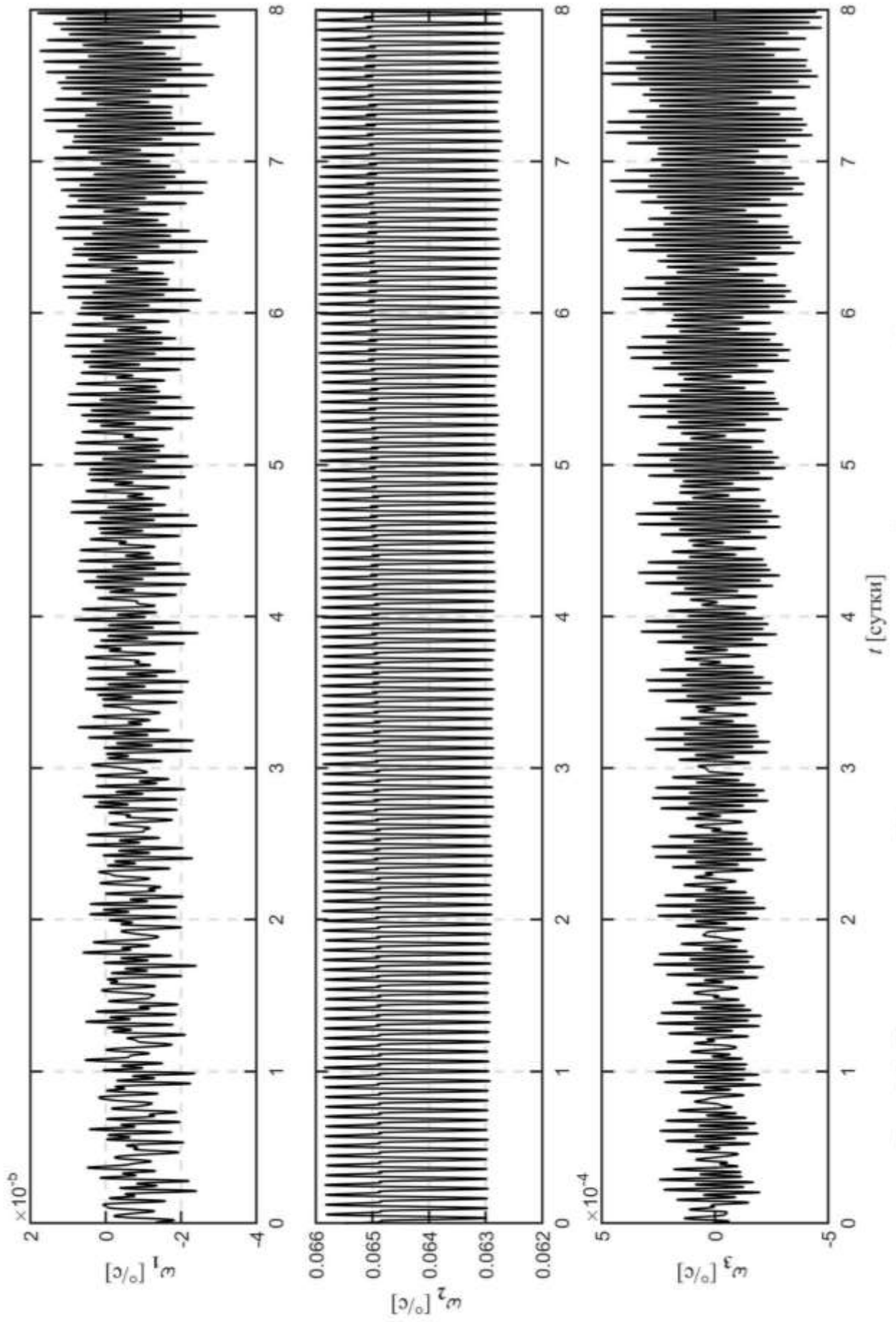


Рис. 3.2. Угловая скорость КА в режиме его пассивной гравитационной ориентации.

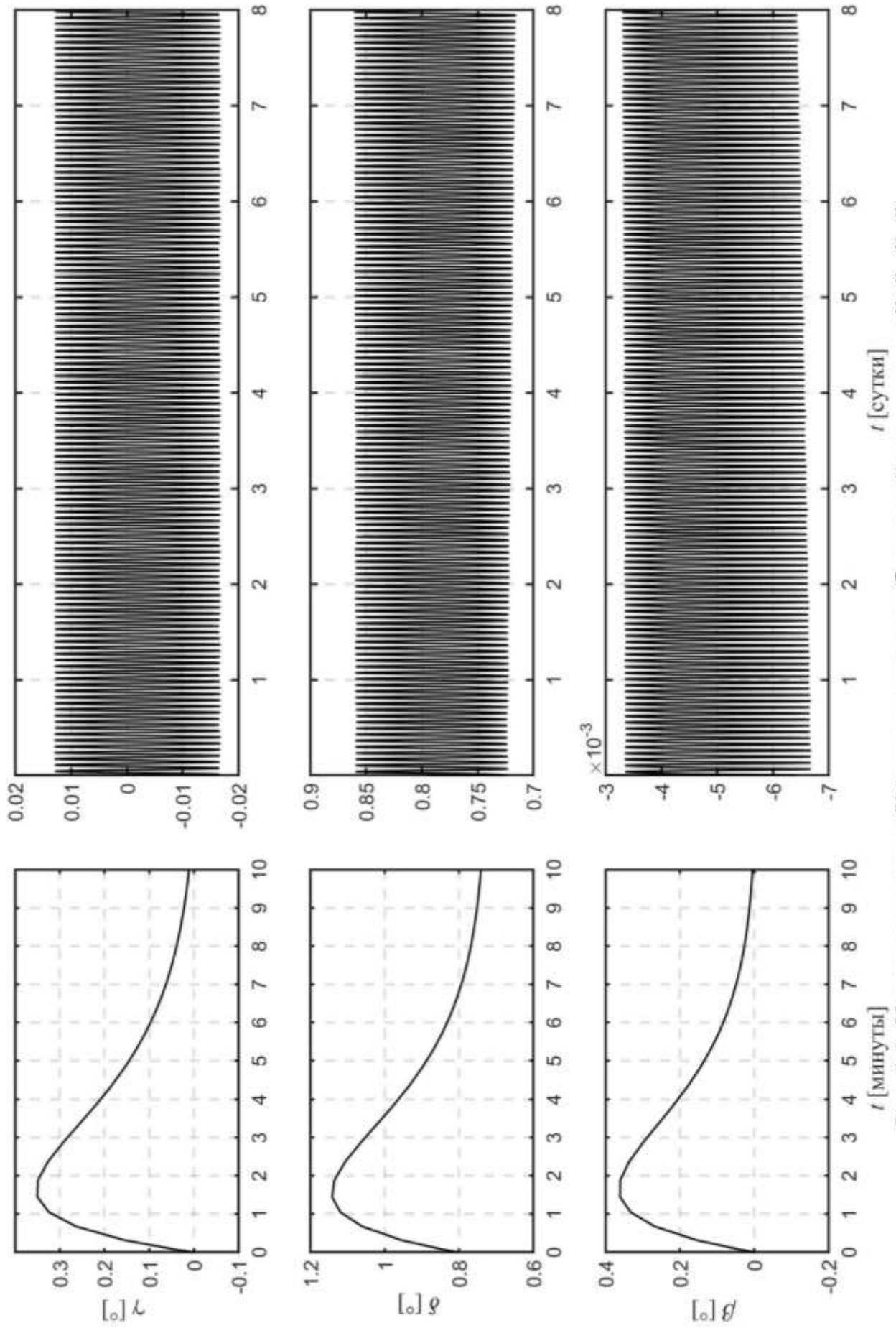


Рис. 3.3. Углы ориентации КА в режиме его орбитальной ориентации (3.4), (3.6).

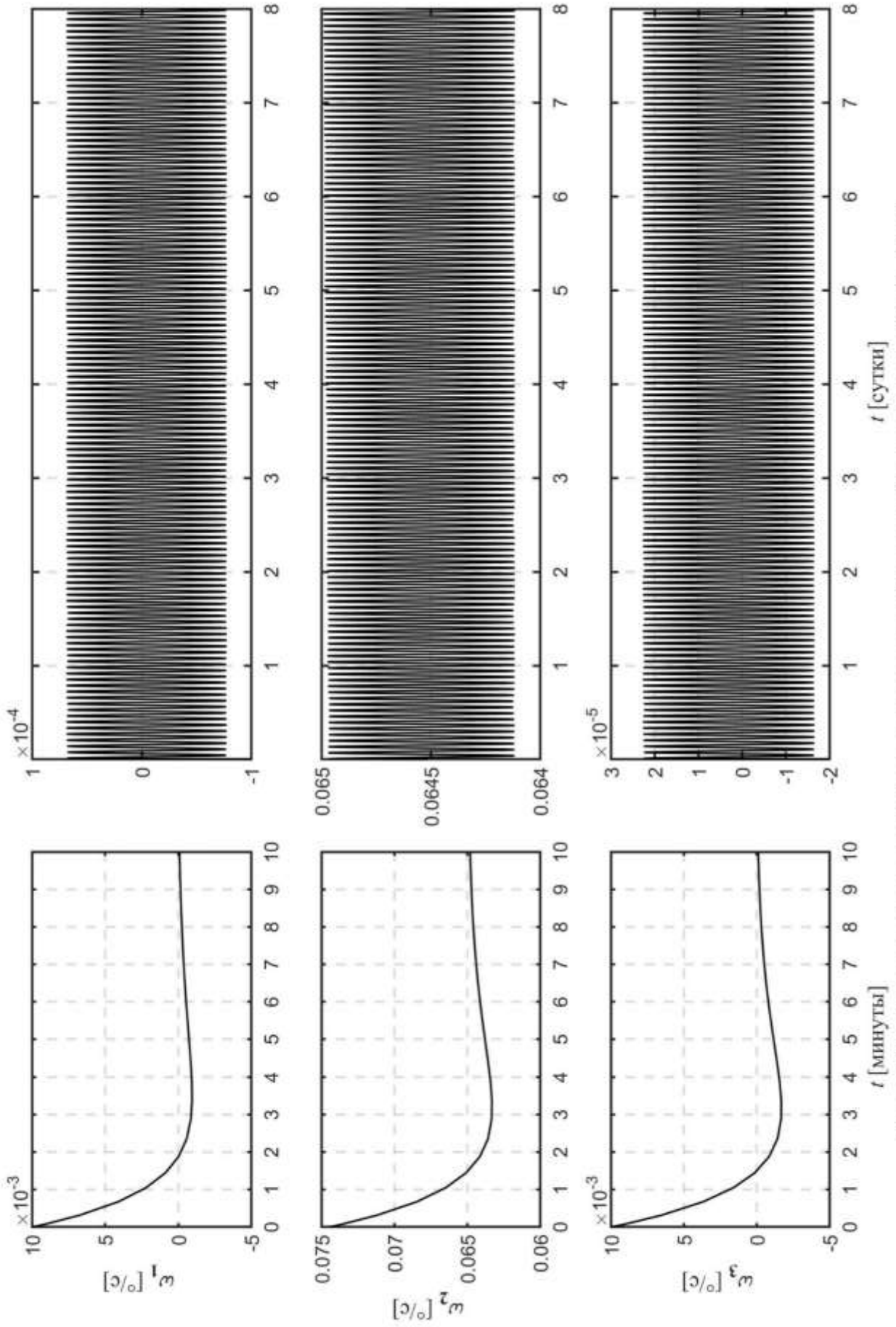


Рис. 3.4. Угловая скорость КА в режиме его орбитальной ориентации (3.4), (3.6).

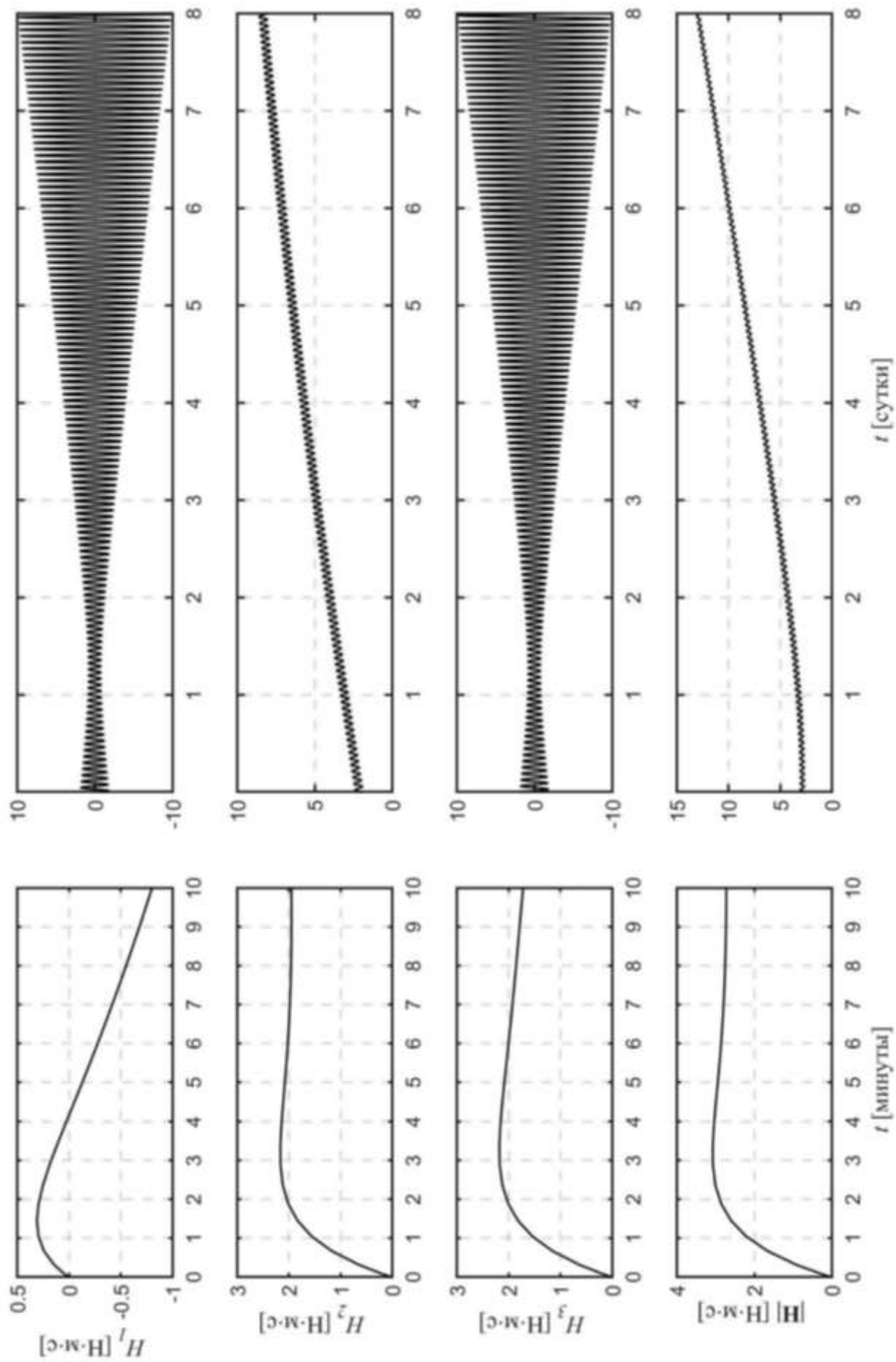


Рис. 3.5. Гиросtatический момент КА в режиме его орбитальной ориентации (3.4), (3.6).

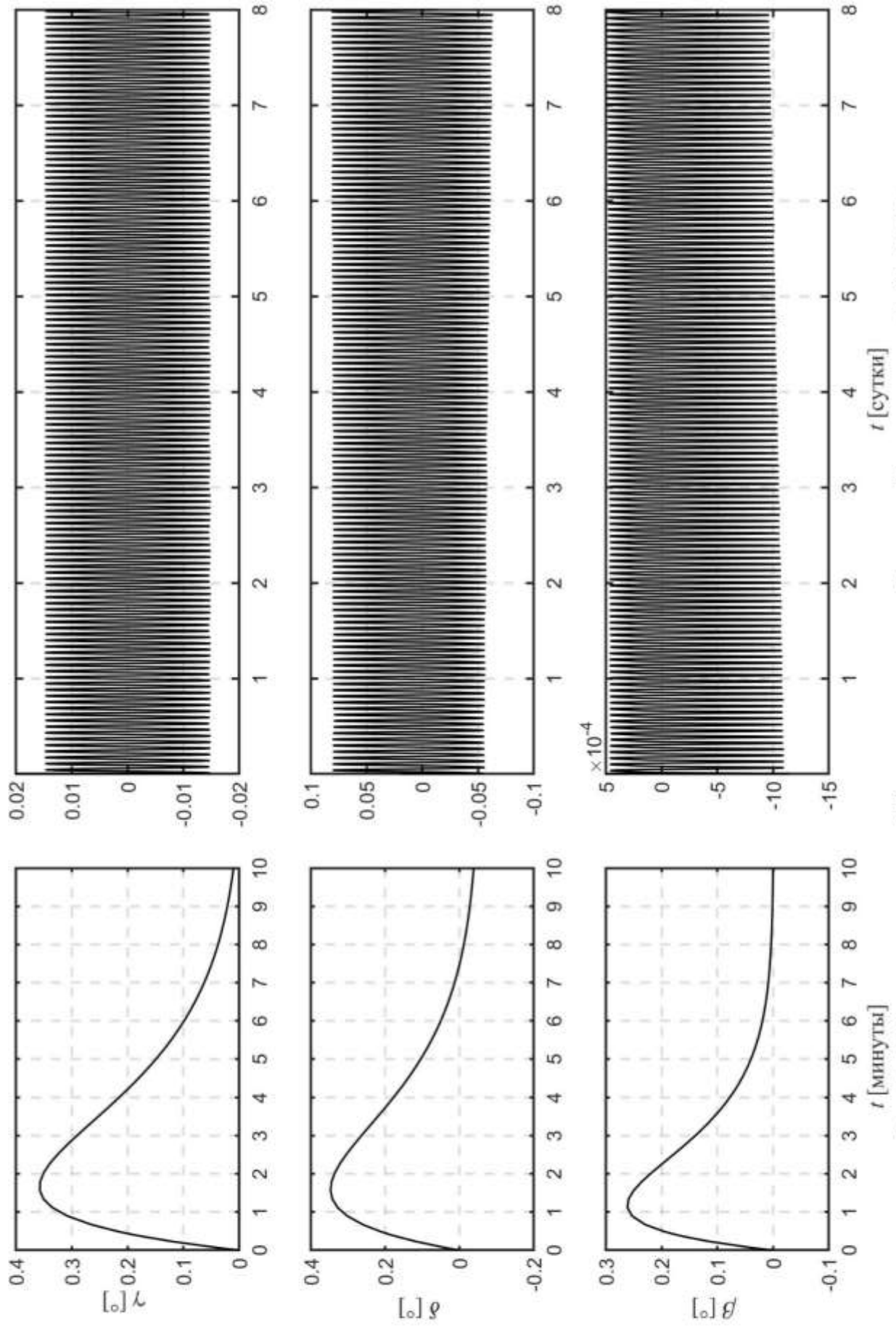


Рис. 3.6. Углы ориентации КА в режиме его орбитальной ориентации (3.4), (3.12).

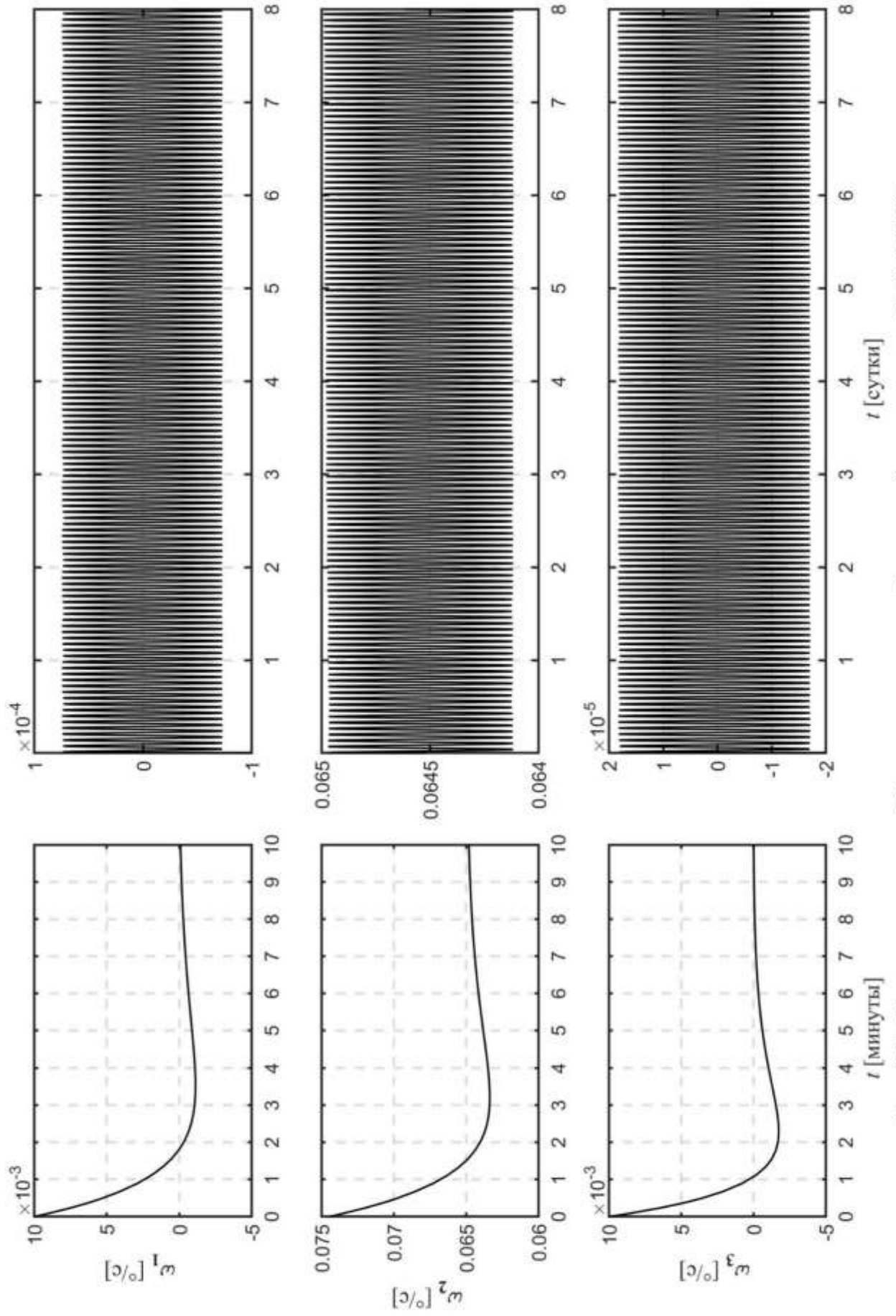


Рис. 3.7. Угловая скорость КА в режиме его орбитальной ориентации (3.4), (3.12).

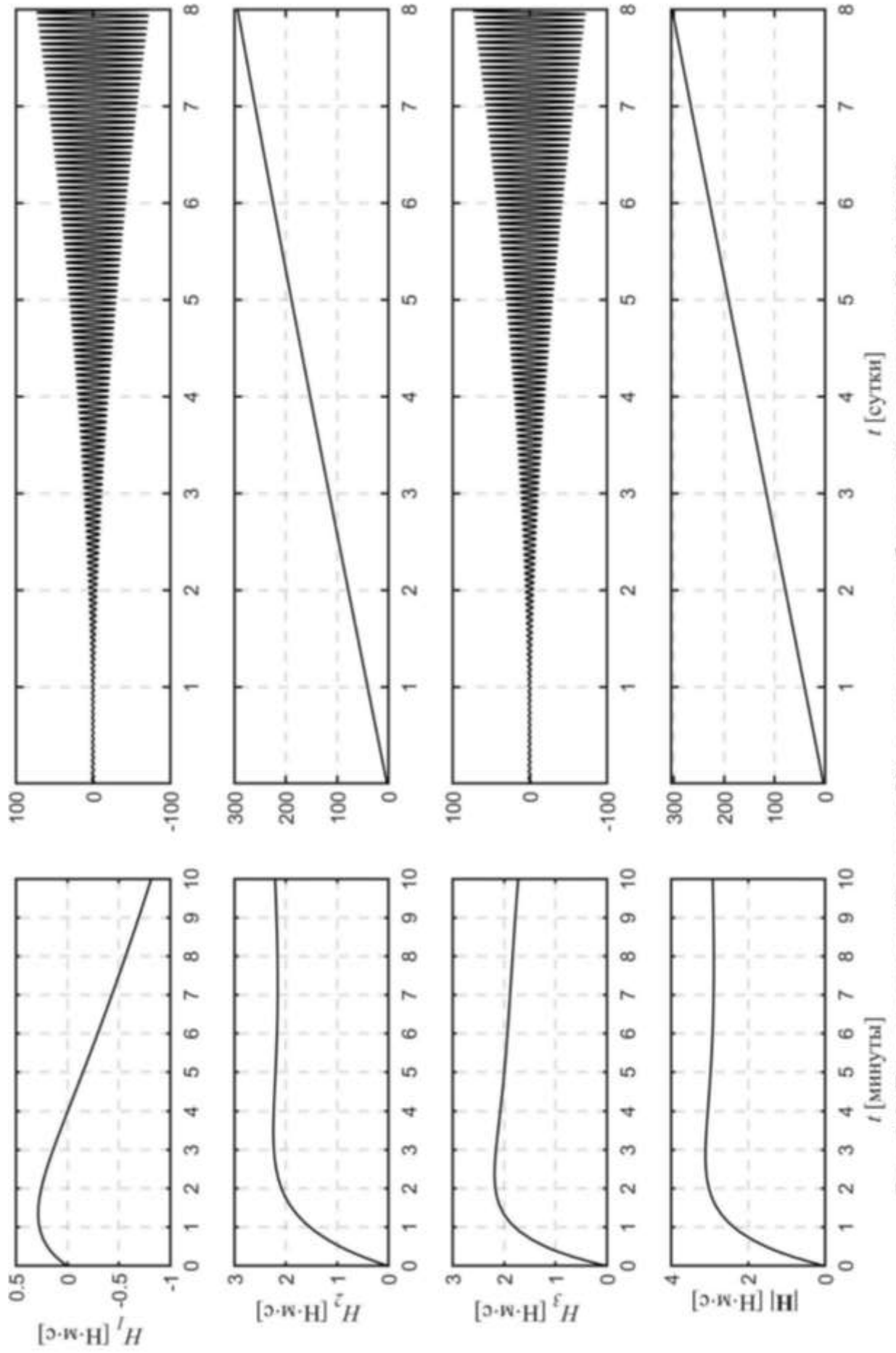


Рис. 3.8. Гиросtatический момент КА в режиме его орбитальной ориентации (3.4), (3.12).

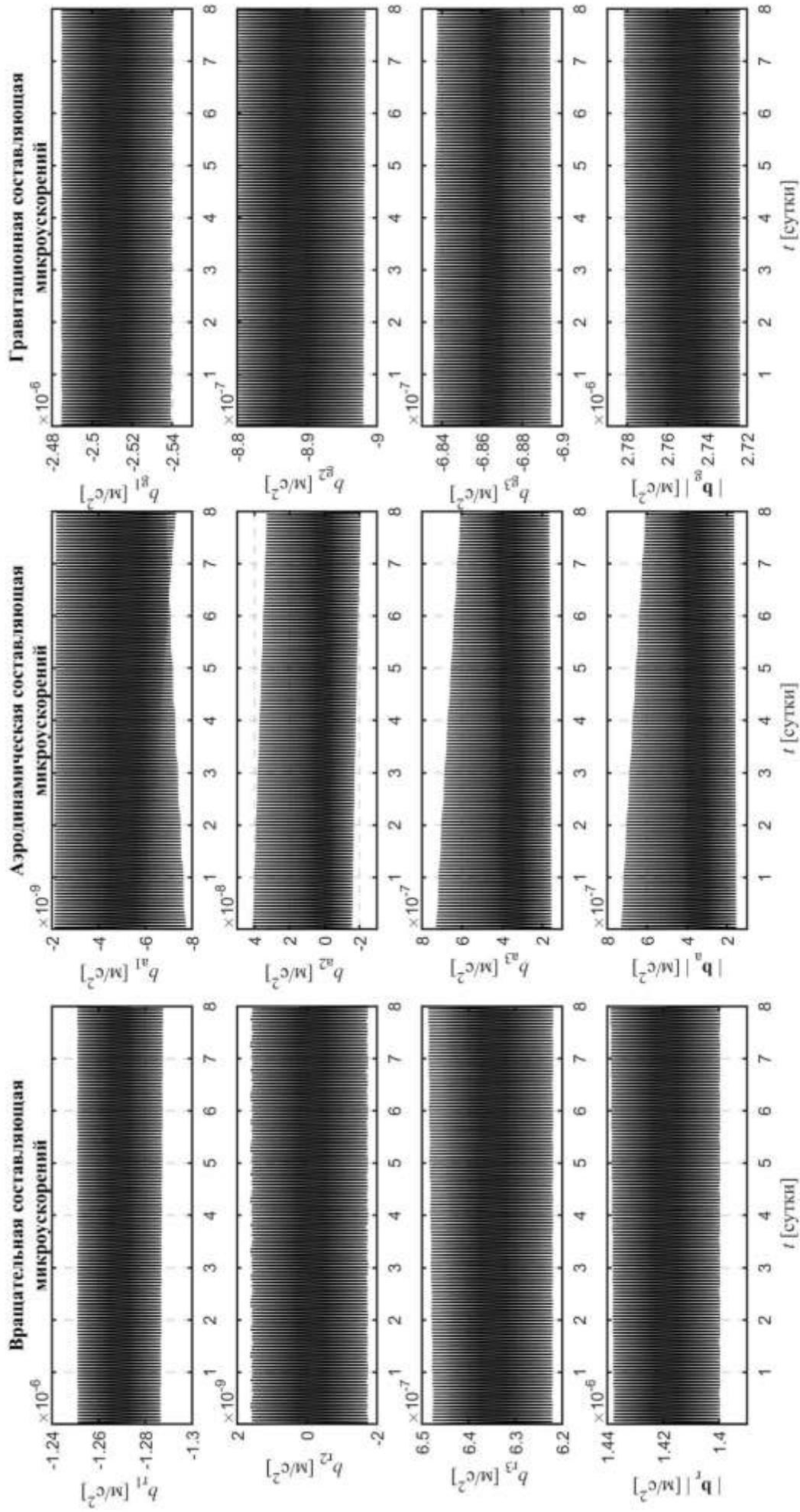


Рис. 3.9. Компоненты составляющих $\mathbf{b}_r$, $\mathbf{b}_a$, $\mathbf{b}_g$ микроускорений в режиме орбитальной ориентации КА (3.4), (3.6).

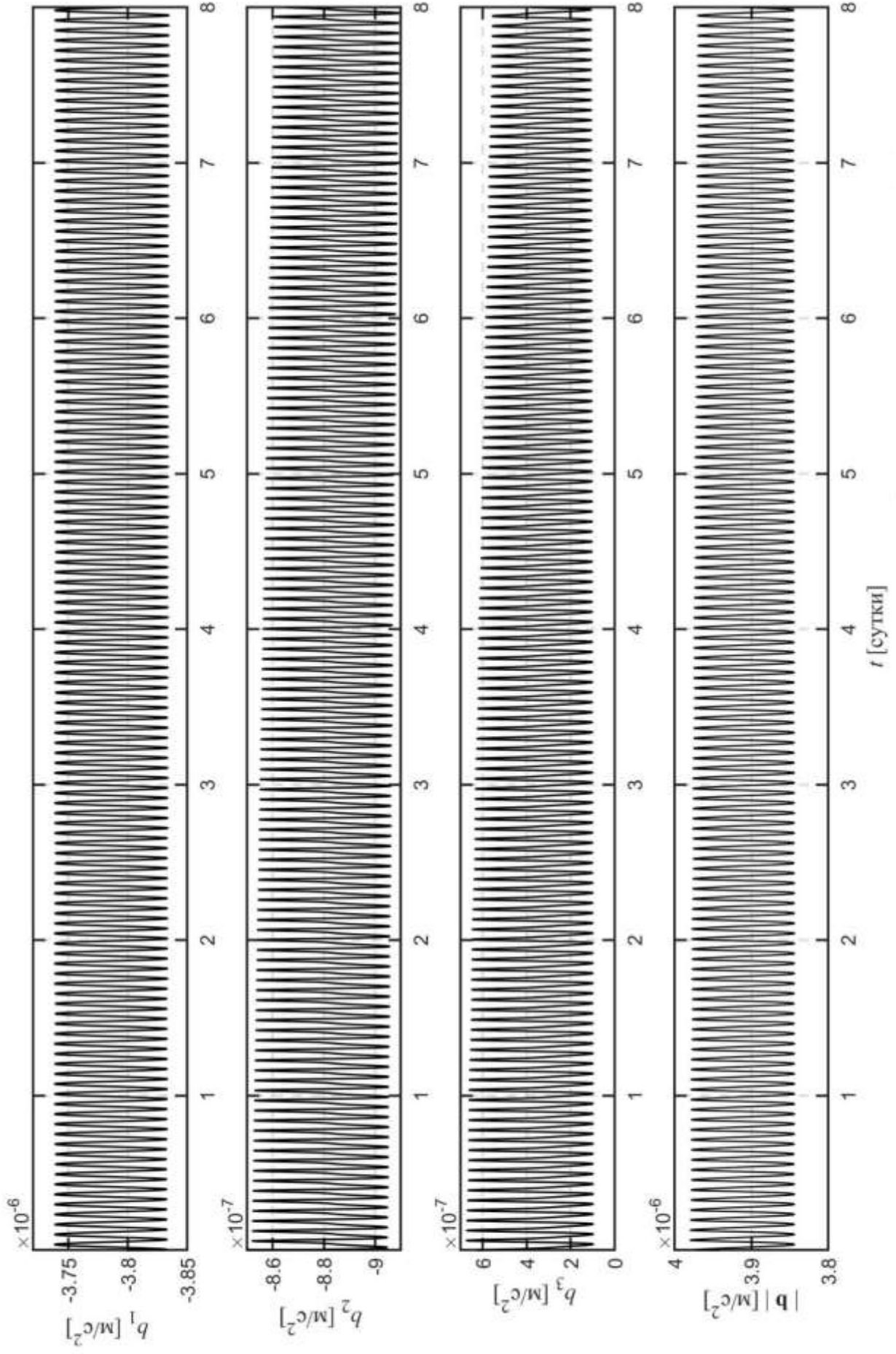


Рис. 3.10. Компоненты суммарных микроускорений в режиме орбитальной ориентации КА (3.4), (3.6).

Глава 4. Режим орбитальной ориентации космического аппарата

Поддержание достаточно точной орбитальной ориентации можно обеспечить без накопления гиросtatического момента [50, 53]. При этом нет необходимости в использовании специального выбора матрицы U_0 , как было реализовано в третьей главе.

4.1 Управление угловым движением космического аппарата с помощью гиросистемы

Для обеспечения длительной гравитационной ориентации КА при наличии дестабилизирующего действия возмущающих моментов обычно применяют демпфирующие устройства [159]. В качестве таковых можно использовать систему гироскопических органов управления, установленных на КА. Чтобы реализовать гиродемпфирование, достаточно задать надлежащий закон управления гиросистемой.

4.1.1 Уравнения углового движения космического аппарата

Космический аппарат считаем гиростатом, центр масс которого движется по геоцентрической орбите. Уравнения движения КА состоят из двух подсистем (см. п. 1.3). Подсистема уравнений углового движения образована уравнениями, описывающими теорему об изменении кинетического момента КА в движении относительно центра масс (1.4) и уравнениями Пуассона для элементов матрицы перехода W (1.8). В уравнениях кинетического момента учитываются гравитационный $\mathbf{M}_g$ (1.5) и аэродинамический моменты $\mathbf{M}_a$ (1.6). Теорему об изменении кинетического момента КА представим в виде

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_a, \quad \mathbf{K} = \hat{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}. \quad (4.1)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – абсолютная угловая скорость КА, $\hat{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции КА, $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$ – гиростатический момент КА

(собственный кинетический момент гиросистемы).

Чтобы замкнуть подсистему уравнений (1.8), (4.1) надо добавить уравнение, описывающее изменение гиросtatического момента КА в виде

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = -\mathbf{M}_c, \quad (4.2)$$

где $\mathbf{M}_c$ – момент, действующий со стороны гиросистемы, на корпус КА. Выражения для $\mathbf{M}_c$ будут приведены ниже.

4.1.2 Орбитальная ориентация космического аппарата с использованием гиродемпфирования

В начале рассмотрим режим гравитационной ориентации КА. Уравнения (1.8), (4.1) неудобны для пояснения такого режима и способа его реализации, но это можно сделать с помощью более простых уравнений, учитывающих только главные факторы. А именно, предположим, что орбита центра масс КА круговая и неизменна в абсолютном пространстве, на КА действует один лишь гравитационный момент. В этом случае уравнения (1.8), (4.1) можно преобразовать к виду

$$\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) = 3\omega_0^2 (\mathbf{E}_3 \times \hat{I}\mathbf{E}_3), \quad (4.3)$$

$$\dot{\gamma} = \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \quad \dot{\delta} = \frac{\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma}{\cos \beta} - \omega_0,$$

$$\dot{\beta} = \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma.$$

В этом случае система (4.3) имеет 24 стационарных решения, в которых $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{E}_2$, орты $\mathbf{e}_i$ совпадают с ортами $\pm \mathbf{E}_j$, $i, j = \overline{1, 3}$, где $\omega_0 = \sqrt{\mu_E / r^3}$ – среднее движение КА (орбитальная частота). Эти решения описывают положения равновесия (покой) КА в орбитальной системе координат [154]. Здесь $\mathbf{E}_3 = (u_{31}, u_{32}, u_{33})^T$, а величины u_{3i} выражаются через углы γ , δ и β по формулам (1.1).

Ограничимся рассмотрением двух стационарных решений системы (4.3), задаваемых соотношениями:

$$\mathbf{e}_1 = -\mathbf{E}_3, \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_1, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_1, \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_3, \mathbf{e}_3 = -\mathbf{E}_2. \quad (4.5)$$

При выполнении неравенств $I_1 < I_3 < I_2$ решение (4.4) является устойчивым, а решение (4.5) – неустойчивым [154]. Устойчивое стационарное решение (4.4) можно использовать для реализации режима пассивной трехосной гравитационной ориентации КА. Далее по тексту устойчивое положение равновесия (4.4) будем называть гравитационной ориентацией КА.

Чтобы реализовать гиросдмпирование для режима орбитальной ориентации КА близкой к его гравитационной ориентации, зададим закон изменения собственного кинетического момента гиросистемы в виде [164]

$$\hat{T} \dot{\mathbf{H}} + \mathbf{H} - H_0 \mathbf{e}_2 = \hat{J}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_2), \quad (4.6)$$

где $\hat{T} = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, $\hat{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$, J_i , τ_i , $i = \overline{1,3}$ – положительные постоянные, H_0 – произвольная постоянная. Использование закона управления (4.6) угловым движением КА подразумевает наличие на его борту датчиков угловых скоростей, в соответствии с показаниями которых изменяется собственный кинетический момент гиросистемы.

Система уравнений (4.3), (4.6) допускает стационарное решение

$$\gamma = \delta = \beta = 0, \omega_1 = \omega_2 - \omega_0 = \omega_3 = 0, H_1 = H_2 - H_0 = H_3 = 0. \quad (4.7)$$

Это решение также описывает положение равновесия КА в орбитальной системе координат, при этом расположение осей системы $Ox_1x_2x_3$ соответствует (4.4).

Для исследования устойчивости стационарного решения (4.7) можно воспользоваться теоремами Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского [145].

Рассмотрим функцию Ляпунова [164]

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2 - \omega_0 \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i u_{2i} + \frac{3}{2} \omega_0^2 \sum_{i=1}^3 I_i u_{3i}^2 + \omega_0 \left(H_2 - \sum_{i=1}^3 H_i u_{2i} \right) + \frac{1}{2} \omega_0^2 (I_2 - 3I_1) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{H_1^2}{J_1} + \frac{(H_2 - H_0)^2}{J_2} + \frac{H_3^2}{J_3} \right).$$

Ее производная в силу системы (4.3), (4.6) $\dot{V} = -\sum_{i=1}^3 \tau_i \dot{H}_i^2 / J_i$ знакоотрицательна.

В окрестности решения (4.7) с точностью до членов третьего порядка малости относительно $\gamma, \delta, \beta, \omega_1, \omega_2 - \omega_0, \omega_3, H_1, H_2 - H_0, H_3$ имеем

$$\begin{aligned} V = & \frac{I_1}{2}(\omega_1 - \omega_0 \beta)^2 + \frac{I_2}{2}(\omega_2 - \omega_0)^2 + \frac{I_3}{2}(\omega_3 + \omega_0 \gamma)^2 + \frac{1}{2}[(I_2 - I_3)\omega_0 + H_0]\omega_0 \gamma^2 + \\ & + \frac{3}{2}\omega_0^2(I_3 - I_1)\delta^2 + \frac{1}{2}[4(I_2 - I_1)\omega_0 + H_0]\omega_0 \beta^2 + \omega_0(H_3 \gamma - H_1 \beta) + \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{H_1^2}{J_1} + \frac{(H_2 - H_0)^2}{J_2} + \frac{H_3^2}{J_3}\right). \end{aligned}$$

Нетривиальные условия положительной определенности выписанной квадратичной формы выражаются неравенствами

$$(I_2 - I_3 - J_3)\omega_0 + H_0 > 0, [4(I_2 - I_1) - J_1]\omega_0 + H_0 > 0, I_3 > I_1. \quad (4.8)$$

Если последние неравенства выполнены и

$$I_2 \neq I_1, \quad (4.9)$$

то пересечение множества $\dot{V} = 0$ с достаточно малой окрестностью положения равновесия (4.7) не содержит целых траекторий системы (4.3), (4.6) отличных от (4.7). Это утверждение установлено приемом, описанным в [165], с помощью анализа соответствующих линеаризованных уравнений. При выполнении неравенств (4.8), (4.9) удовлетворены условия теоремы Барбашина – Крассовского ([145], теорема 3.2) и положение равновесия (4.7) асимптотически устойчиво. Если же хотя бы одно из неравенств (4.8) выполнено с противоположным знаком и по-прежнему справедливо неравенство (4.9), то выполнены условия теоремы Крассовского ([145], теорема 4.1) и положение равновесия (4.7) неустойчиво [164].

Из-за разного рода возмущающих факторов (эллиптичность орбиты, влияние аэродинамического момента и др.) система уравнений (1.8), (4.1) для рассматриваемого КА не имеет решений, описывающих его покой (4.7) в орбитальной системе координат, однако в силу непрерывной зависимости

решений дифференциальных уравнений от начальных условий и параметров эти уравнения допускают решения, которые после пересчета переменных u_{1i} , u_{2i} , $i = \overline{1,3}$, в углы γ , δ и β будут близки положению покоя (4.7).

4.1.3 Управление угловым движением космического аппарата в режиме гиросдмпирования

Чтобы реализовать закон управления (4.6) выразим момент $\mathbf{M}_c$, действующий со стороны гиросистемы на корпус КА и стабилизирующий режим гравитационной ориентации КА в окрестности положения (4.7) в виде

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega} - \hat{T}^{-1} \hat{J} (\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_2) + \hat{T}^{-1} (\mathbf{H} - H_0 \mathbf{e}_2). \quad (4.10)$$

Система (4.2), (4.3), (4.10), линеаризованная в окрестности стационарного решения (4.7) разбивается на две независимые подсистемы, которые имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1) \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_1 = (\omega_2 - \omega_0, \delta, H_2 - H_0)^T, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3\omega_0^2(I_1 - I_3)/I_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = (1/I_2, 0, -1)^T, \quad \mathbf{K}_1 = (-J_2/\tau_2, 0, 1/\tau_2),$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = (\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2) \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_2 = (\omega_1, \omega_3, \gamma, \beta, H_1, H_3)^T, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & (\omega_0(I_2 - I_3) + H_0)/I_1 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0/I_1 \\ (\omega_0(I_1 - I_2) - H_0)/I_3 & -J_3/I_3\tau_3 & 0 & 3\omega_0^2(I_1 - I_2)/I_3 & \omega_0/I_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1/I_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1/I_3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -J_1/\tau_1 & 0 & 0 & 0 & 1/\tau_1 & 0 \\ 0 & -J_3/\tau_3 & 0 & 0 & 0 & 1/\tau_3 \end{pmatrix}.$$

Структура матриц $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ подразумевает, что для формирования управления угловым движением КА не требуется информация о его

ориентации. Значения коэффициентов J_i , τ_i , $i = \overline{1,3}$ выберем таким образом, чтобы все корни характеристического полинома линеаризованной системы лежали в левой полуплоскости комплексного переменного достаточно далеко от мнимой оси. Точнее, критерием качества закона управления (4.10) будем считать степень устойчивости линеаризованной системы (4.11), (4.12) – взятую с обратным знаком действительную часть самого правого корня ее характеристического полинома. В данном случае этот полином разлагается на полиномы третьего

$$\det[(A_1 + B_1 K_1) - \lambda^{(1)} E_3] = 0,$$

и шестого порядков

$$\det[(A_2 + B_2 K_2) - \lambda^{(2)} E_6] = 0,$$

являющихся характеристическими полиномами первой (4.11) и второй подсистем (4.12) соответственно. Здесь E_3 и E_6 – единичные матрицы третьего и шестого порядков соответственно.

Полином третьего порядка зависит от коэффициентов J_2 , τ_2 . Выберем их так, чтобы этот полином имел трехкратный действительный корень $\lambda_j^{(1)} = -\alpha$, $j = \overline{1,3}$ где $\alpha > 0$ – степень устойчивости. Получаем

$$\tau_2 = \frac{3}{\alpha}, \quad J_2 = 8I_2, \quad \alpha = \omega_0 \sqrt{\frac{I_3 - I_1}{I_2}}.$$

Из приведенных соотношений видно, что максимальная степень устойчивости первой подсистемы (4.11) определяется только моментами инерции КА и высотой его орбиты. Для представленных в п. 1.3 параметров КА центра масс которого движется по **Орбите II** (п. 1.4) имеем

$$\omega_0 = 1.125 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}, \quad \alpha = 9.73 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, \quad \tau_2 = 3084 \text{ с}, \quad J_2 = 88000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Полином шестого порядка содержит коэффициенты τ_1 , J_1 и τ_3 , J_3 . С учетом соотношений (4.8) для асимптотической устойчивости системы (4.12) необходимо выполнение следующих условий:

$$0 < J_1 < \left(4(I_2 - I_1) + \frac{H_0}{\omega_0} \right), \quad 0 < J_3 < \left(I_2 - I_3 + \frac{H_0}{\omega_0} \right). \quad (4.13)$$

Приняв значение $H_0 = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ найдем значения J_1, J_3 в виде

$$J_1 = \frac{1}{2} \left(4(I_2 - I_1) + \frac{H_0}{\omega_0} \right) = 19222 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_3 = \frac{1}{2} \left(I_2 - I_3 + \frac{H_0}{\omega_0} \right) = 2322 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Примем значения $\tau_1 = J_1 / \chi_1 = 4805 \text{ с}$, $\tau_3 = J_3 / \chi_3 = 2322 \text{ с}$, где $\chi_1 = 4 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $\chi_3 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Корни полинома шестого порядка при этом равны

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^{(2)} &= -1.37 \cdot 10^{-4} \pm 2.0 \cdot 10^{-3} i \text{ с}^{-1}, \\ \lambda_{3,4}^{(2)} &= -1.37 \cdot 10^{-4} \pm 3.7 \cdot 10^{-5} i \text{ с}^{-1}, \\ \lambda_{5,6}^{(2)} &= -8.61 \cdot 10^{-4} \pm 1.4 \cdot 10^{-3} i \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Степень устойчивости полинома шестого порядка $\alpha = 1.37 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$. Таким образом, закон управления (4.10) с указанными значениями параметров J_i, τ_i , $i = \overline{1,3}$ обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (1.8), (4.1), (4.2) в окрестности стационарного решения (4.7).

4.1.4 Математическое моделирование режима гиродемпфирования

Покажем, что выбранный закон изменения управляющего момента гиросистемы (4.10) действительно обеспечивает устойчивую ориентацию КА, близкую к гравитационной. С этой целью вычислим решения системы (1.8), (4.1), (4.2) (4.10) с начальными условиями $\gamma(0) = \delta(0) = \beta(0) = 0$, $H_2(0) = 0$, $H_1(0) = H_3(0) = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ и

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) - \omega_0 = \omega_3(0) = 0.01 \text{ }^\circ/\text{с} \quad (4.14)$$

на интервале времени 140 суток. Геометрические и массово-инерционные характеристики КА указаны в п. 1.3, в качестве начальных условий уравнений движения центра масс использовались параметры **Орбиты II**. Значения соответствующих коэффициентов закона управления (4.10) приняты как в п. 4.1.3. На рис. 4.1 – 4.4 изображены графики зависимости от времени углов γ, δ, β , компонент угловой скорости ω_i , $i = \overline{1,3}$, гиростатического момента H_i

и его модуля $|\mathbf{H}|$, а также компонент b_i и модуля $|\mathbf{b}|$ вектора микроускорений. На графиках не показан начальный участок длительностью 1 сутки, содержащий переходной процесс, который обусловлен ошибками в задании начальной угловой скорости (4.14) и начальных значений гиросtatического момента. Результаты расчетов показывают, что закон управления (4.10) обеспечивает устойчивую орбитальную ориентацию КА близкую к гравитационной, и гиросtatический момент при этом остается ограниченным.

Из-за выбранного масштаба времени на рис. 4.1 – 4.4 не видны колебания соответствующих величин с частотами кратными ω_0 , которые вызваны сопротивлением атмосферы и эллиптичностью орбиты. Такие колебания показаны в работе [47] где на интервале времени 6 суток приведены результаты численного решения уравнений движения КА с подобным законом управления.

На рис. 4.1 увеличение амплитуды колебаний, а также постоянное смещение угла $\delta \approx 0.8^\circ$ вызваны сопротивлением атмосферы, зависящим от положения Солнца относительно плоскости орбиты КА. Это положение меняется из-за прецессии плоскости орбиты с угловой скоростью $\sim 5^\circ/\text{сут}$. За период времени, равный примерно 70 суток, величина постоянного смещения угла δ практически не меняется, амплитуда колебаний меняется в диапазоне от 0.1 до 1.5° . Поскольку закон управления (4.10) не накладывает ограничений на угловое положение КА значения углов γ , δ , β приведенные на рис. 4.1 в каждый момент времени соответствуют относительному равновесному положению КА под действием гравитационного и аэродинамического моментов [162] (см. главу 3). В данном случае для оценки смещения δ_0 значения угла δ можно использовать приближенную аналитическую зависимость

$$\delta_0 = \frac{2R_c L_c \chi_c (R_0 + R_E)^2 \rho_a}{3(I_3 - I_1) + \pi R_c^2 \chi_c (R_0 + R_E)^2 \rho_a},$$

которая была получена путем линеаризации системы (1.8), (4.1) в окрестности стационарного решения (4.7). При указанной линеаризации были приняты условия, что центр масс КА движется по круговой орбите радиуса $r = R_0 + R_E$

неизменной в абсолютном пространстве и скорость набегающего потока направлена по касательной к орбите КА [142]. Здесь $R_E = 6378.14$ км – радиус Земли принимаемой сферой, R_0 – высота круговой орбиты КА. В табл. 2 приведены некоторые значения δ_0 в зависимости от значений R_0 . Соответствующие R_0 значения плотности атмосферы ρ_a были взяты из ГОСТ Р 25645.166-2004 для $F_{10.7} = 150 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$.

Таблица 2.

R_0 , км	400	420	440
ρ_a , кг/м ³	$3.02 \cdot 10^{-12}$	$2.11 \cdot 10^{-12}$	$1.48 \cdot 10^{-12}$
δ_0 , град	1.101	0.801	0.580

На рис. 4.3 смещение компоненты H_2 и модуля $|\mathbf{H}|$ вектора гиросtatического момента определяется значением постоянной величины $H_0 = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ закона управления (4.10). Как видно из неравенств (4.13) величина H_0 влияет на размер области устойчивости коэффициентов J_1 , J_3 , чем больше значение H_0 , тем больше размер указанной области. Однако при выборе значения H_0 следует учитывать конкретные характеристики и схему расположения установленных на борту КА исполнительных органов гиросистемы, чтобы при реализации закона управления собственный кинетический момент каждого исполнительного органа не приближался к своему предельному значению (см. главу 6).

На рис. 4.4 видно, что значение модуля вектора микроускорений $|\mathbf{b}|$ не превышает $4.1 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$ и область вариации вектора $\mathbf{b}$ достаточно мала. Как было отмечено в первой главе, значение $|\mathbf{b}| < 10^{-5} \text{ м/с}^2$ является приемлемым при проведении космических экспериментов, в частности в области материаловедения. Небольшой размер области вариации вектора $\mathbf{b}$ ($|\mathbf{b}| \approx |b_1|$) является дополнительным преимуществом режима гравитационной ориентации КА при проведении указанных экспериментов.

4.1.5 Орбитальная ориентация космического аппарата в окрестности гравитационно устойчивого положения равновесия

Закон управления (4.10) можно реализовать без использования постоянной величины гиростатического момента H_0 . Обозначим положение равновесия (4.7) при $H_0 = 0$ как (4.7'). Тогда момент $\mathbf{M}_c$, действующий со стороны гиросистемы на корпус КА и стабилизирующий режим гравитационной ориентации КА в окрестности положения равновесия (4.7'), представим в виде

$$\mathbf{M}_c = -K_\omega(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_2) + K_h \mathbf{H}, \quad (4.15)$$

где $K_\omega = (k_{ij}^{(\omega)})_{i,j=1}^3$, $K_h = (k_{ij}^{(h)})_{i,j=1}^3$, $k_{ij}^{(\omega)}$, $k_{ij}^{(h)}$, $i, j = \overline{1,3}$ – постоянные величины. Систему (4.2), (4.3), (4.15), линеаризованную в окрестности решения (4.7'), представим в виде двух независимых подсистем третьего и шестого порядка

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = (A_3 + B_3 K_3 C_3) \mathbf{x}_3, \quad \mathbf{x}_3 = (\omega_2 - \omega_0, \delta, H_2)^T, \quad (4.16)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3\omega_0^2(I_1 - I_3)/I_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = (1/I_2, 0, -1)^T,$$

$$C_3 = \text{diag}(1, 0, 1), \quad K_3 = (-k_{22}^{(\omega)}, 0, k_{22}^{(h)}),$$

$$\dot{\mathbf{x}}_4 = (A_4 + B_4 K_4 C_4) \mathbf{x}_4, \quad \mathbf{x}_4 = (\omega_1, \omega_3, \gamma, \beta, H_1, H_3)^T, \quad (4.17)$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1/I_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1/I_3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T, \quad C_4 = \text{diag}(1, 1, 0, 0, 1, 1),$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0(I_2 - I_3)/I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_0(I_1 - I_2)/I_3 & 0 & 0 & 3\omega_0^2(I_1 - I_2)/I_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_4 = \begin{pmatrix} -k_{11}^{(\omega)} & -k_{13}^{(\omega)} & 0 & 0 & k_{11}^{(h)} & k_{13}^{(h)} \\ -k_{31}^{(\omega)} & -k_{33}^{(\omega)} & 0 & 0 & k_{31}^{(h)} & k_{33}^{(h)} \end{pmatrix}.$$

В данном случае также как и в п. 4.1.3 структура матриц K_3 , C_3 , K_4 , C_4 подразумевает, что для формирования управления угловым движением КА не требуется информация о его ориентации. В данном случае $k_{12}^{(\omega)} = k_{21}^{(\omega)} = k_{23}^{(\omega)} = k_{32}^{(\omega)} = 0$ и $k_{12}^{(h)} = k_{21}^{(h)} = k_{23}^{(h)} = k_{32}^{(h)} = 0$.

Характеристический полином системы третьего порядка зависит от коэффициентов $k_{22}^{(\omega)}$ и $k_{22}^{(h)}$. Выберем их так же, как в п. 4.1.3, чтобы этот полином имел трехкратный действительный корень $\lambda_j^{(3)} = -\alpha$, $j = \overline{1,3}$ где $\alpha > 0$ – степень устойчивости. Получим аналитические зависимости

$$k_{22}^{(h)} = \frac{\alpha}{3}, \quad k_{22}^{(\omega)} = \frac{8I_2\alpha}{3}, \quad \alpha = \omega_0 \sqrt{\frac{I_3 - I_1}{I_2}}.$$

Для рассматриваемого КА: $k_{22}^{(h)} = 3.24 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $k_{22}^{(\omega)} = 28.8 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Значения коэффициентов полинома шестого порядка будем искать как решение задачи линейно-квадратичного регулирования [147] в виде $K_4 = -S^{-1}B_4^T P$, где $P \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ – матрица, полученная в результате численного решения алгебраического матричного уравнения Риккати

$$PA_4 + A_4^T P - PB_4 S^{-1} B_4^T P + C_4^T R C_4 = 0. \quad (4.18)$$

Здесь $R \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ и $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ – положительно определенные матрицы весовых коэффициентов, выбранным значениям которых $R = \text{diag}(1, 5 \cdot 10^7, 0, 0, 100, 1)$, $S = \text{diag}(1, 1)$ соответствуют значения коэффициентов

$$k_{11}^{(\omega)} = 1042.76 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad k_{13}^{(\omega)} = -1271.81 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad k_{11}^{(h)} = 9.60 \text{ с}^{-1}, \quad k_{13}^{(h)} = 0.12 \text{ с}^{-1},$$

$$k_{31}^{(\omega)} = 6620.91 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad k_{33}^{(\omega)} = -3709.13 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad k_{31}^{(h)} = -2.55 \text{ с}^{-1}, \quad k_{33}^{(h)} = 1.54 \text{ с}^{-1}.$$

Соответствующие значения корней характеристического полинома шестой степени

$$\lambda_{1,2}^{(4)} = -1.03 \cdot 10^{-4} \pm 2.10 \cdot 10^{-3} i \text{ с}^{-1}, \quad \lambda_{3,4}^{(4)} = -1.14 \cdot 10^{-3} \pm 4.72 \cdot 10^{-4} i \text{ с}^{-1},$$

$$\lambda_5^{(4)} = -1.20 \text{ с}^{-1}, \lambda_6^{(4)} = -10.00 \text{ с}^{-1}.$$

Степень устойчивости полинома шестого порядка $\alpha = 1.03 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$. Таким образом, закон управления (4.15) с указанными значениями параметров $k_{ij}^{(\omega)}$, $k_{ij}^{(h)}$, $i, j = \overline{1,3}$ обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (1.8), (4.1), (4.2) в окрестности стационарного решения (4.7').

Представленные значения элементов матриц R и S , как и использованный метод нахождения коэффициентов закона управления в целом, не являются единственно возможными. Применяя специальные методы математической теории автоматического управления [147], вероятно, возможно получить значения коэффициентов полинома шестого порядка, обеспечивающие больший запас устойчивости и лучшее качество управления. Однако это является темой для отдельного исследования.

Следует отметить, закон управления (4.15) по сути представляет собой закон управления (4.10), в котором не учитывается слагаемое $\mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}$, значение $H_0 = 0$ и используются другие обозначения для коэффициентов: $K_\omega = \hat{T}^{-1}J$, $K_h = \hat{T}^{-1}$. Поэтому $A_3 = A_1$, $B_3 = B_1$, $B_4 = B_2$ и матрицы A_4, A_2 имеют похожую структуру. Введение новых обозначений было сделано с целью представления линеаризованной системы уравнений в виде (4.16), (4.17) для удобства численного решения уравнения (4.18). Таким образом, коэффициенты закона управления (4.10), обеспечивающие асимптотическую устойчивость системы (1.8), (4.1), (4.2) в окрестности стационарного решения (4.7) также можно подобрать в результате решения задачи линейно-квадратичного регулирования с использованием соответствующих матриц линеаризованной системы (4.12).

Покажем, что для найденных значений коэффициентов $k_{ij}^{(\omega)}$, $k_{ij}^{(h)}$, $i, j = \overline{1,3}$ закон изменения управляющего момента гиросистемы (4.15) действительно обеспечивает устойчивую ориентацию КА, близкую к гравитационной. С этой целью вычислим решения системы (1.8), (4.1), (4.2) (4.15) с начальными условиями $\gamma(0) = \delta(0) = \beta(0) = 0$, $H_1(0) = H_2(0) = H_3(0) = 0$ и (16) на интервале

времени 8 суток. На рис. 4.5 – 4.7 изображены графики зависимости от времени углов γ , δ , β , компонент угловой скорости ω_i , $i = \overline{1,3}$, гиросtatического момента H_i и его модуля $|\mathbf{H}|$. На графиках не показан начальный участок длительностью 1 сутки, содержащий переходной процесс, который обусловлен ошибками в задании начальной угловой скорости (4.14). Результаты расчетов показывают, что закон управления (4.15) обеспечивает устойчивую орбитальную ориентацию КА и гиросtatический момент при этом остается ограниченным. На рис. 4.5 заметно увеличение амплитуды колебаний угла δ , а также его постоянное смещение, что полностью соответствует результатам, представленным в п. 4.1.4, на рис. 4.1. Отсутствие в законе управления (4.15) слагаемого, содержащего постоянное значение гиросtatического момента H_0 , не оказывает существенного влияния на угловую ориентацию КА, его абсолютную угловую скорость и на уровень микроускорений на его борту, разница видна только на графиках гиросtatического момента. На рис. 4.7 видно, что в случае использования закона управления (4.15) отсутствует величина постоянного смещения компоненты H_2 и модуля $|\mathbf{H}|$. Установившиеся колебания величин γ , δ , β , ω_i , h_i , $i = \overline{1,3}$ и $|\mathbf{H}|$ происходят с доминирующей частотой, которая равна орбитальной частоте ω_0 , что соответствует влиянию аэродинамического торможения $c\rho_a v v$.

4.1.6 Орбитальная ориентация космического аппарата в окрестности гравитационно неустойчивого положения равновесия

Рассмотрим стационарное решение (4.5) системы (4.3), которое при выполнении неравенств $I_1 < I_3 < I_2$ является неустойчивым. Чтобы реализовать режим орбитальной ориентации КА, в окрестности гравитационно неустойчивого положения равновесия зададим закон управления гиросистемой в виде

$$\mathbf{M}_c = -K_\theta [(\mathbf{E}_3 \times \mathbf{e}_2) + (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_2)] - K_\omega (\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2) + K_h \mathbf{H}, \quad (4.19)$$

где $K_\theta = (k_{ij}^{(\theta)})_{i,j=1}^3$, $K_\omega = (k_{ij}^{(\omega)})_{i,j=1}^3$, $K_h = (k_{ij}^{(h)})_{i,j=1}^3$, $k_{ij}^{(\theta)}$, $k_{ij}^{(\omega)}$, $k_{ij}^{(h)}$, $i, j = \overline{1,3}$ – постоянные величины.

Система уравнений (4.3), (4.19) допускает стационарное решение

$$\gamma = -\delta = \pi/2, \beta = 0, \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 + \omega_0 = 0, H_1 = H_2 = H_3 = 0. \quad (4.20)$$

Это решение описывает положение равновесия КА в орбитальной системе координат, при этом расположение осей системы $Ox_1x_2x_3$ соответствует (4.5).

Систему (4.2), (4.3), (4.19), линеаризованную в окрестности решения (4.20), представим в виде двух независимых подсистем третьего и шестого порядка

$$\dot{\mathbf{x}}_5 = (A_5 + B_5 K_5) \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_5 = (\omega_3 + \omega_0, \delta + \pi/2, H_3)^T, \quad (4.21)$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 3\omega_0^2(I_1 - I_2)/I_3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_5 = (1/I_3, 0, -1)^T, K_5 = (-k_{33}^{(\omega)}, k_{33}^{(\theta)}, k_{33}^{(h)}),$$

$$\dot{\mathbf{x}}_6 = (A_6 + B_6 K_6) \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_6 = (\omega_1, \omega_2, \gamma - \pi/2, \beta, h_1, h_2)^T, \quad (4.22)$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0(I_3 - I_2)/I_1 & -3\omega_0^2(I_3 - I_2)/I_1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_0(I_1 - I_3)/I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_6 = \begin{pmatrix} 1/I_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1/I_2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T,$$

$$K_6 = \begin{pmatrix} -k_{11}^{(\omega)} & -k_{12}^{(\omega)} & -2k_{11}^{(\theta)} - \omega_0 k_{12}^{(\omega)} & -k_{12}^{(\theta)} + \omega_0 k_{11}^{(\omega)} & k_{11}^{(h)} & k_{12}^{(h)} \\ -k_{21}^{(\omega)} & -k_{22}^{(\omega)} & -2k_{21}^{(\theta)} - \omega_0 k_{22}^{(\omega)} & -k_{22}^{(\theta)} + \omega_0 k_{21}^{(\omega)} & k_{21}^{(h)} & k_{22}^{(h)} \end{pmatrix}.$$

В данном случае такой вид линеаризованной системы (4.21), (4.22), а также структура матриц K_5 , K_6 , обусловлены тем, что режим орбитальной

ориентации КА в окрестности гравитационно неустойчивого положения равновесия нельзя реализовать без использования информации об ориентации КА. Здесь $k_{13}^{(\theta)} = k_{23}^{(\theta)} = k_{31}^{(\theta)} = k_{32}^{(\theta)} = 0$, $k_{13}^{(\omega)} = k_{23}^{(\omega)} = k_{31}^{(\omega)} = k_{32}^{(\omega)} = 0$ и $k_{13}^{(h)} = k_{23}^{(h)} = k_{31}^{(h)} = k_{32}^{(h)} = 0$.

Характеристический полином системы третьего порядка зависит от коэффициентов $k_{33}^{(\theta)}$, $k_{33}^{(\omega)}$ и $k_{33}^{(h)}$. Выберем их как и выше, чтобы этот полином имел трехкратный действительный корень $\lambda_j^{(5)} = -\alpha$, $j = \overline{1,3}$ где $\alpha > 0$ – степень устойчивости. Получим аналитические зависимости

$$k_{33}^{(h)} = \frac{\alpha^3 I_3}{3\omega_0^2 (I_1 - I_2)}, \quad k_{33}^{(\omega)} = I_3 (3\alpha - k_{33}^{(h)}), \quad k_{33}^{(\theta)} = 3(I_3 \alpha - \omega_0^2 (I_1 - I_2)).$$

Для рассматриваемого КА зададимся значением $\alpha = 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, тогда

$$k_{33}^{(h)} = -4.267 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}, \quad k_{33}^{(\omega)} = 628.648 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad k_{33}^{(\theta)} = 0.849 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Как и в п. 4.1.5, значения коэффициентов полинома шестого порядка будем искать в виде $K_6 = -S^{-1} B_6^T P$, где $P \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ – матрица, полученная в результате численного решения алгебраического матричного уравнения Риккати $PA_6 + A_6^T P - PB_6 S^{-1} B_6^T P + R = 0$. Здесь $R \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ и $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ – положительно определенные матрицы весовых коэффициентов, выбранным значениям которых $R = \text{diag}(1, 1, 0.01, 1, 0.01, 1)$, $S = \text{diag}(1, 1)$ соответствуют значения коэффициентов

$$k_{11}^{(\omega)} = 701.26 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad k_{12}^{(\omega)} = -554.17 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad k_{11}^{(\theta)} = 0.19 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad k_{12}^{(\theta)} = -0.30 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$k_{11}^{(h)} = -0.17 \text{ с}^{-1}, \quad k_{12}^{(h)} = 0.05 \text{ с}^{-1},$$

$$k_{21}^{(\omega)} = 117.55 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad k_{22}^{(\omega)} = 128.15 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad k_{21}^{(\theta)} = 0.02 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad k_{22}^{(\theta)} = 0.09 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$k_{21}^{(h)} = -0.04 \text{ с}^{-1}, \quad k_{22}^{(h)} = 0.99 \text{ с}^{-1}.$$

Соответствующие значения корней характеристического полинома шестой степени

$$\lambda_{1,2}^{(6)} = -8.40 \cdot 10^{-5} \pm 1.11 \cdot 10^{-3} i \text{ с}^{-1}, \quad \lambda_{3,4}^{(6)} = -6.52 \cdot 10^{-4} \pm 1.47 \cdot 10^{-4} i \text{ с}^{-1},$$

$$\lambda_5^{(6)} = -9.83 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}, \lambda_6^{(6)} = -1.00 \text{ с}^{-1}.$$

Степень устойчивости полинома шестого порядка $\alpha = 8.40 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Таким образом, закон управления (4.19) с указанными значениями параметров $k_{ij}^{(\theta)}$, $k_{ij}^{(\omega)}$, $k_{ij}^{(h)}$, $i, j = \overline{1,3}$ обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (3), (4.2) в окрестности стационарного решения (4.20).

Покажем, что для найденных значений коэффициентов $k_{ij}^{(\theta)}$, $k_{ij}^{(\omega)}$, $k_{ij}^{(h)}$, $i, j = \overline{1,3}$ закон изменения управляющего момента гиросистемы (4.19) действительно обеспечивает ориентацию КА, близкую к гравитационно неустойчивому положению равновесия. С этой целью вычислим решения системы (1.8), (4.1), (4.2), (4.19) с начальными условиями $\beta(0) = 0$, $\gamma(0) = -\delta(0) = \pi/2$, $\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) + \omega_0 = 0.01 \text{ }^\circ/\text{с}$, $H_1(0) = H_2(0) = H_3(0) = 0$ на интервале времени 8 суток. На рис. 4.8 – 4.10 изображены графики зависимости от времени углов γ , δ , β , компонент угловой скорости ω_i , $i = \overline{1,3}$, гиросtatического момента H_i и его модуля $|\mathbf{H}|$. На графиках не показан начальный участок длительностью 1 сутки, содержащий переходной процесс, который обусловлен ошибками в задании начальной угловой скорости. Результаты расчетов показывают, что закон управления (4.19) обеспечивает устойчивую орбитальную ориентацию КА и гиросtatический момент при этом остается ограниченным. На рис. 4.8 постепенное уменьшение амплитуды колебаний углов γ , β вызвано остаточным влиянием переходного процесса протекающего в течение первых суток полета КА. Здесь установившиеся колебания величин γ , δ , β , ω_i , H_i , $i = \overline{1,3}$ и $|\mathbf{H}|$ также происходят с доминирующей частотой, которая равна орбитальной частоте ω_0 .

4.1.7 Спектральный анализ микроускорений

С целью анализа уровня микроускорений, возникающих на борту КА в процессе реализации закона управления (4.10), в работе определены характерные

частоты колебаний модулей векторов $\mathbf{b}_a$, $\mathbf{b}_g$ и $\mathbf{b}$. Частоты были найдены с помощью спектрального анализа, выполнявшегося по схеме, изложенной в п. 1.6.

На рис. 4.11 показаны амплитудные спектры $A_{\mathbf{b}a}(f)$, $A_{\mathbf{b}g}(f)$, $A_{\mathbf{b}}(f)$ величин $|\mathbf{b}_a|$, $|\mathbf{b}_g|$ и $|\mathbf{b}|$ соответственно. Спектры приведены в диапазоне частот от 0 до 0.001 Гц, при значениях $h=10$ с и $N = 6.048 \cdot 10^6$. Показано, что наибольший вклад в общий уровень микроускорений $\mathbf{b}$ на борту КА при использования закона (4.10) вносит составляющая $\mathbf{b}_a$ с доминирующей частотой $f_0 = \omega_0/2\pi \approx 1.79 \cdot 10^{-4}$ Гц. Такие колебания вызваны влиянием атмосферы. Также происходит увеличение амплитуд колебаний величин $|\mathbf{b}_a|$ и $|\mathbf{b}|$ на частоте $2f_0 \approx 3.58 \cdot 10^{-4}$ Гц, однако такое увеличение амплитуд практически не сказывается на общем уровне микроускорений $\mathbf{b}$, возникающих на борту КА.

На рис. 4.4 видно, что $|\mathbf{b}| < 4.1 \cdot 10^{-6}$ м/с², область вариации вектора $\mathbf{b}$ является достаточно малой и колебания микроускорений происходят весьма медленно – с орбитальной частотой. Исходя из этого можно утверждать, что условия на борту КА являются приемлемыми для проведения космических экспериментов.

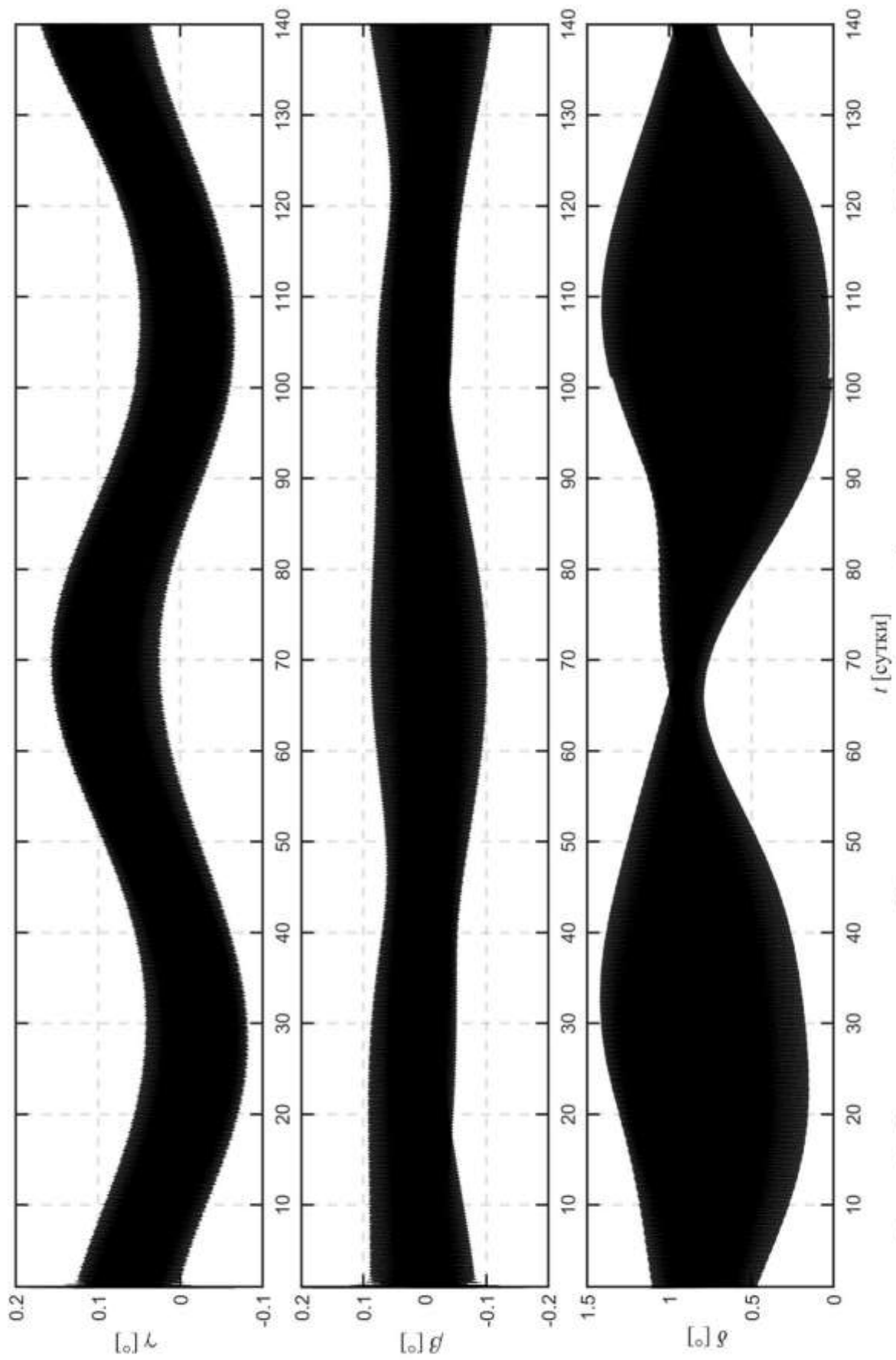


Рис. 4.1. Углы ориентации КА в режиме его орбитальной ориентации с управлением (4.10).

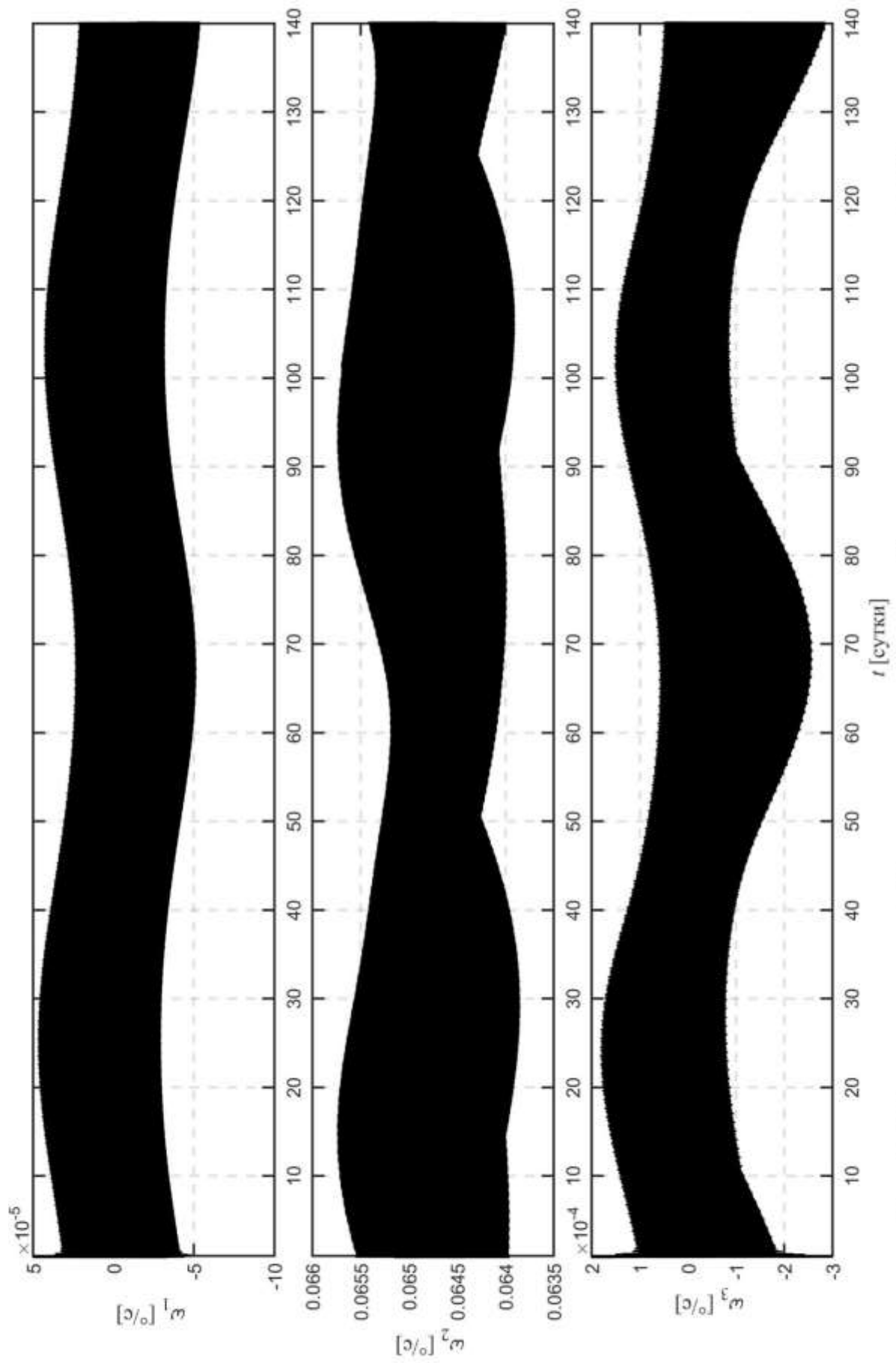


Рис. 4.2. Угловая скорость КА в режиме его орбитальной ориентации с управлением (4.10).

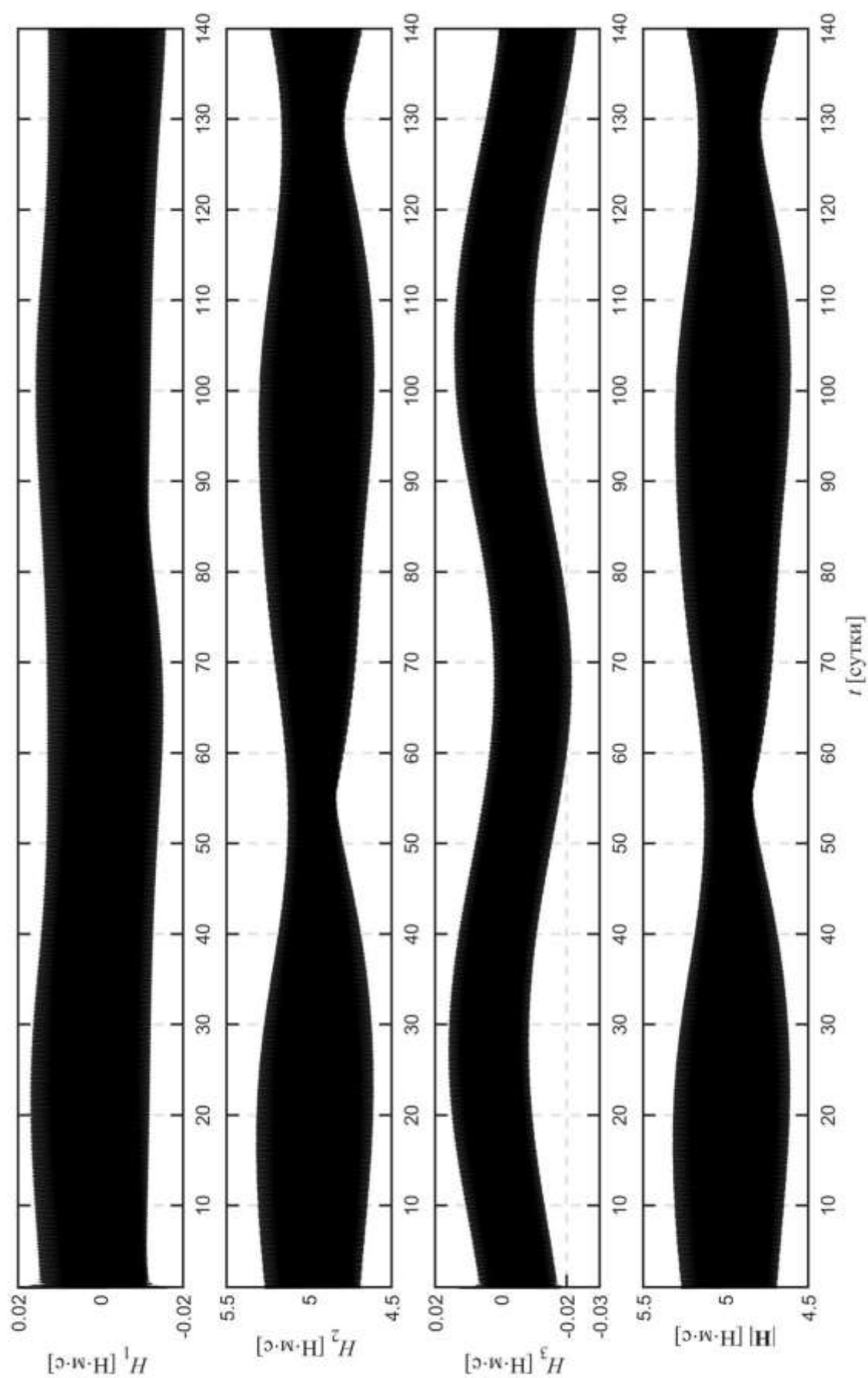


Рис. 4.3. Гиросtatический момент КА в режиме его орбитальной ориентации с управлением (4.10).

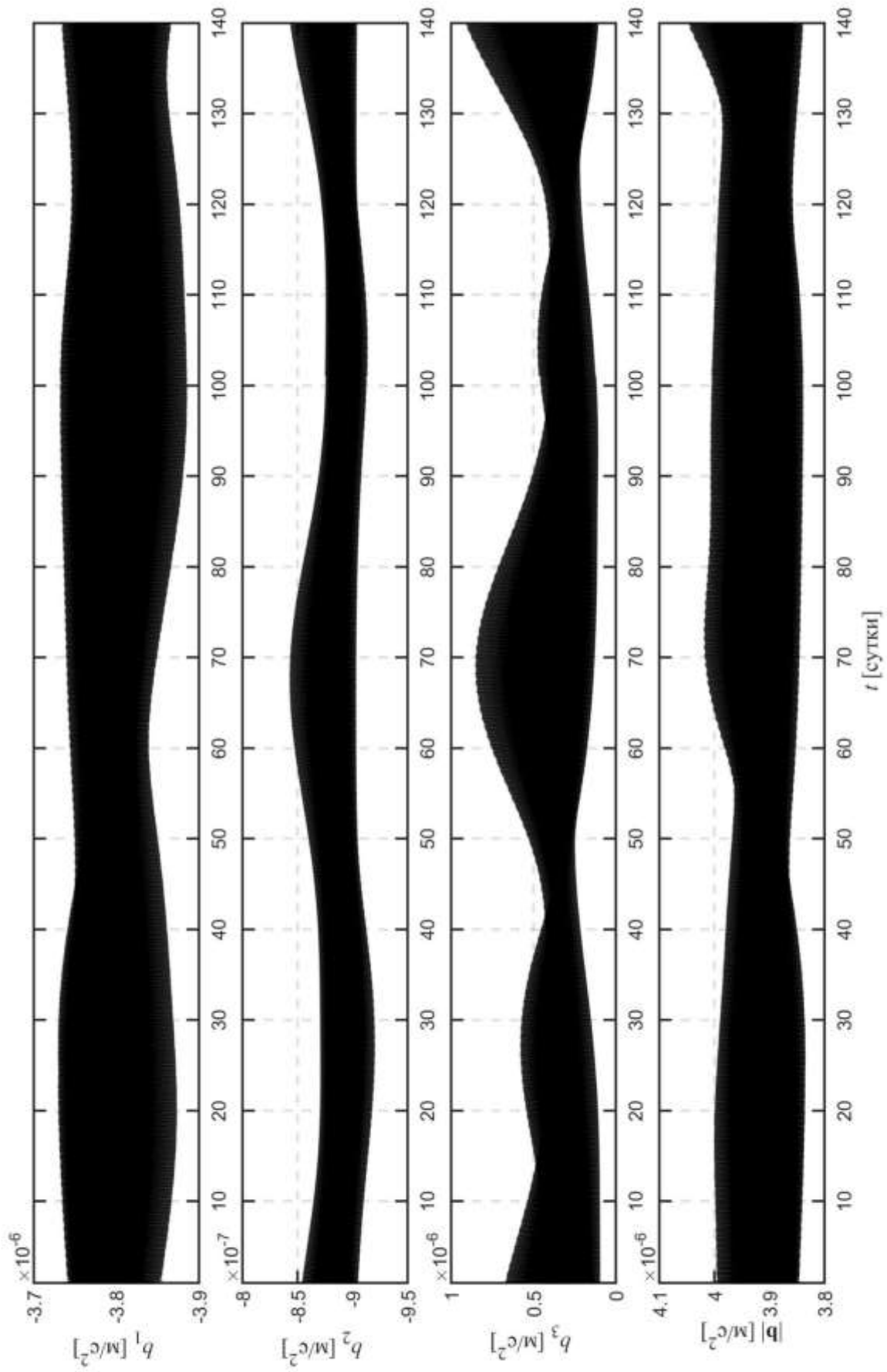


Рис. 4.4. Микроускорения на борту КА в режиме его орбитальной ориентации с управлением (4.10).

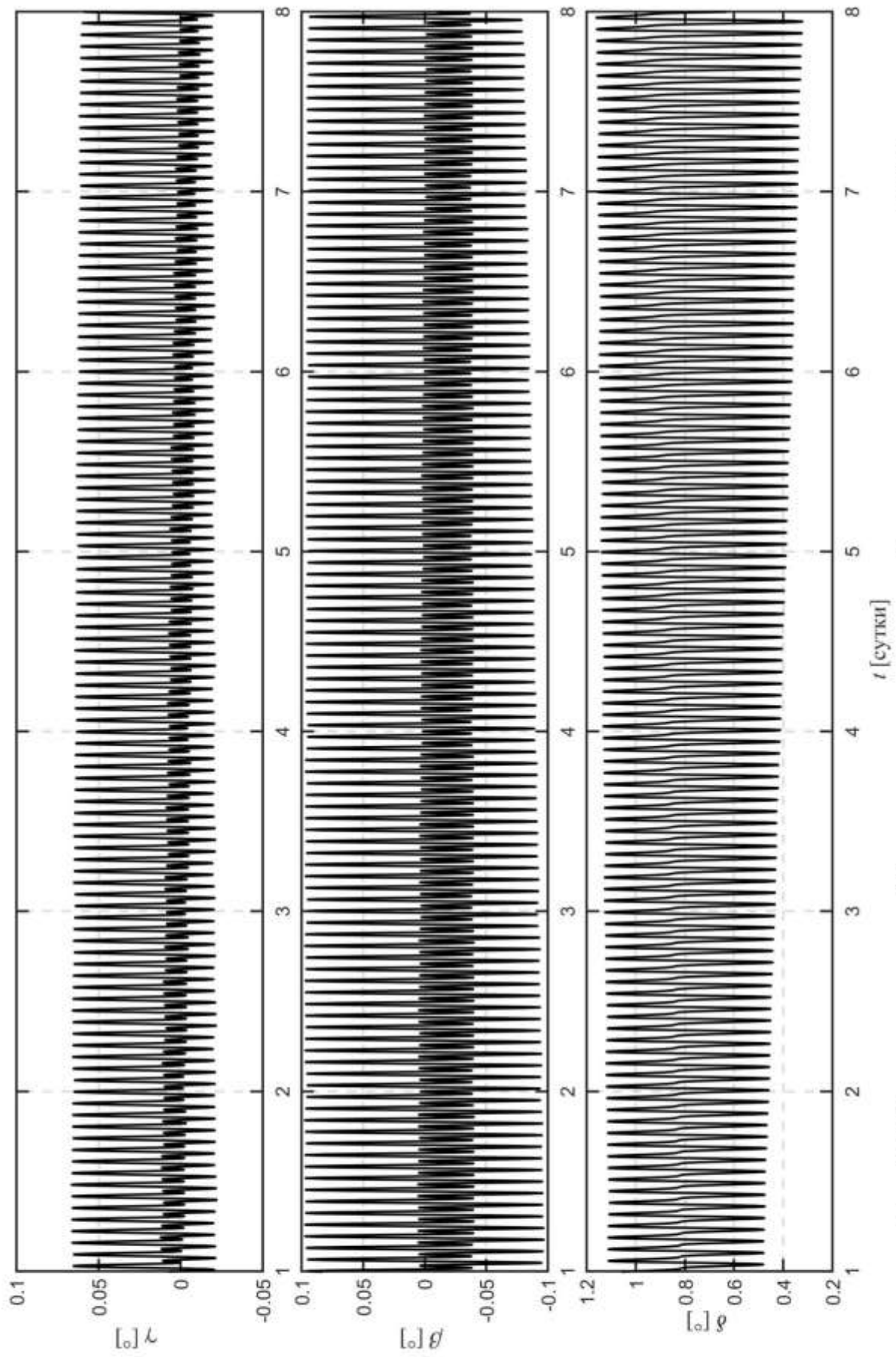


Рис. 4.5. Углы ориентации КА в режиме его орбитальной ориентации с управлением (4.15).

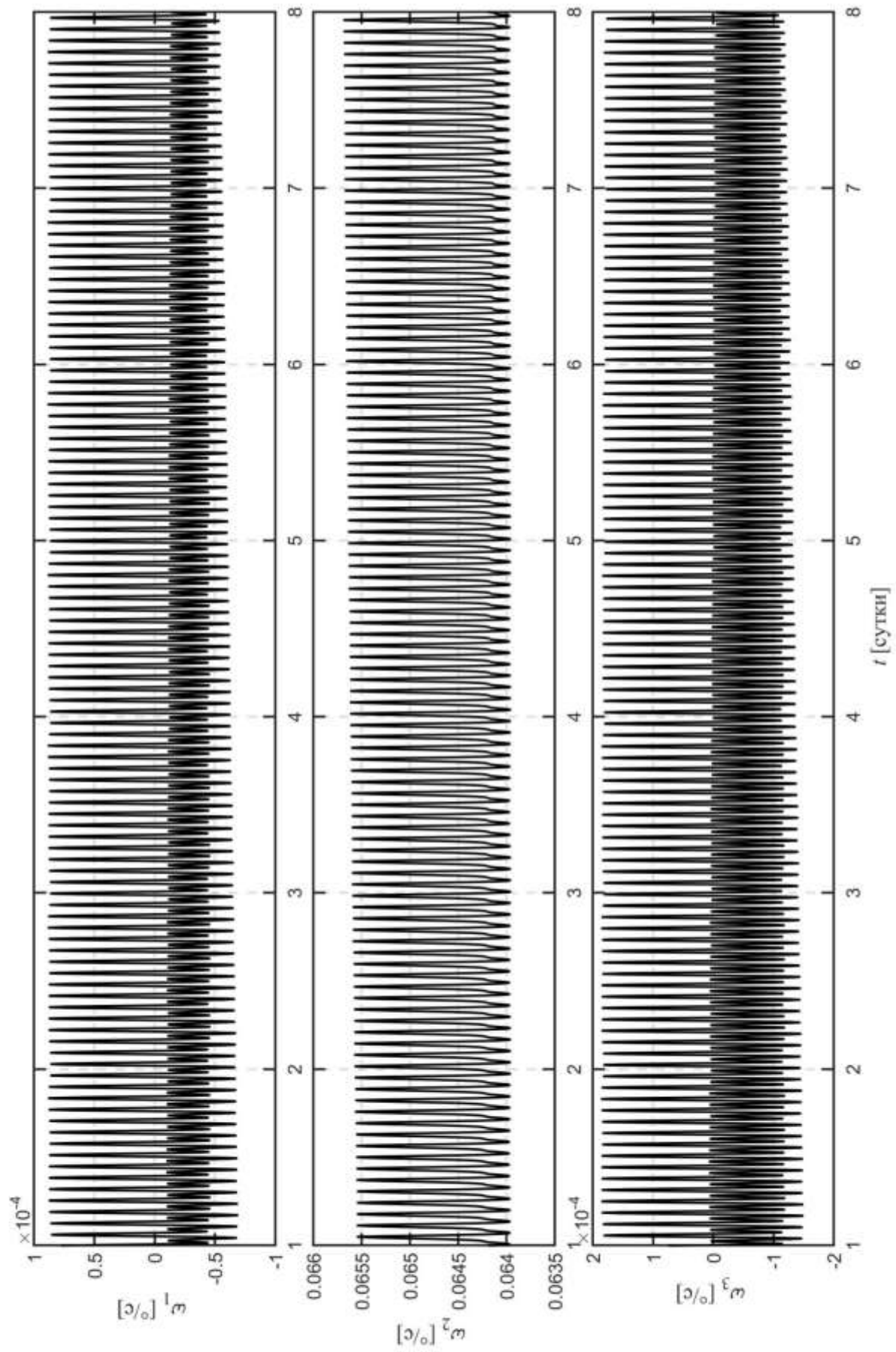


Рис. 4.6. Угловая скорость КА в режиме его орбитальной ориентации с управлением (4.15).

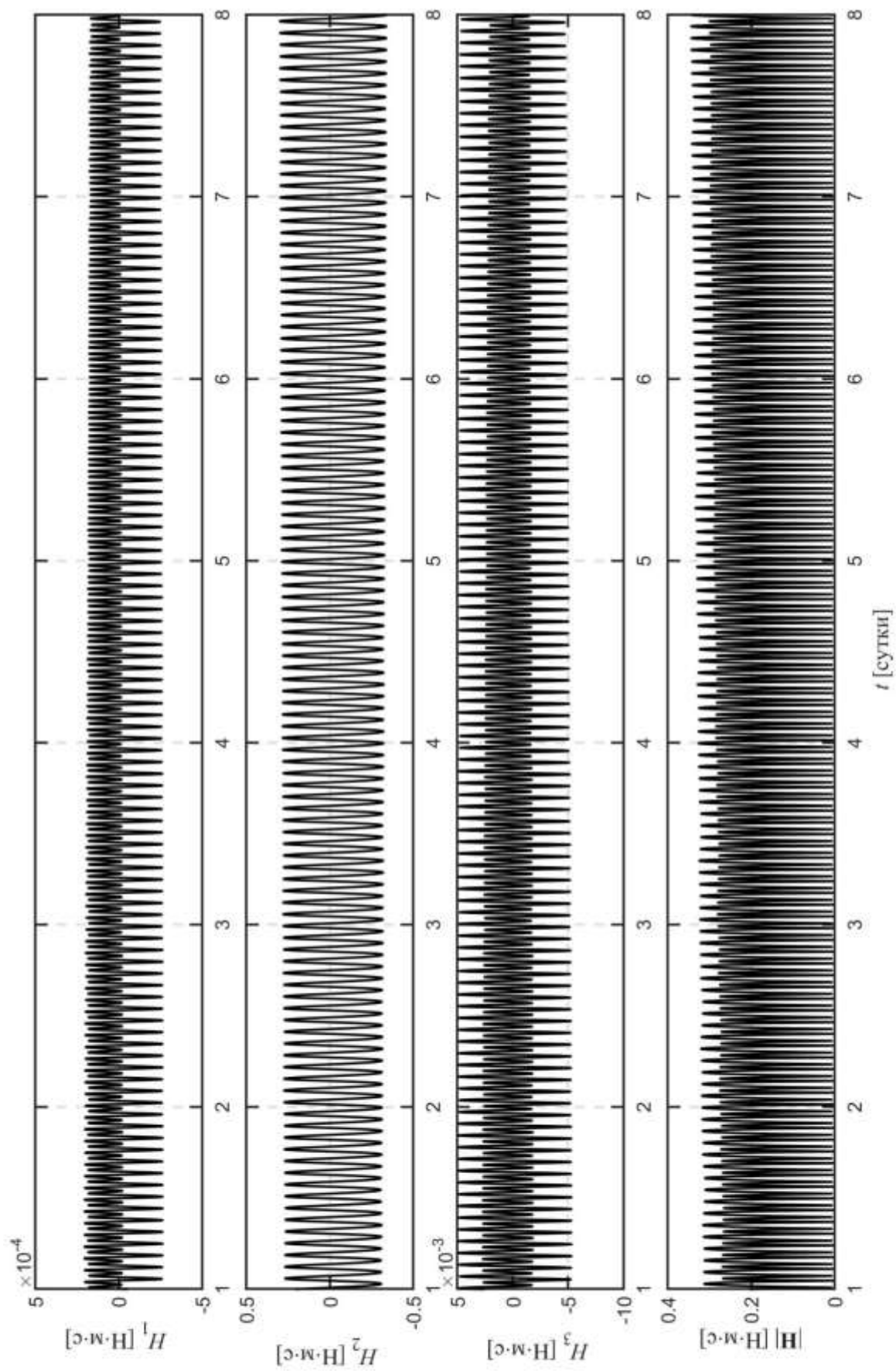


Рис. 4.7. Гиростатический момент КА в режиме его орбитальной ориентации с управлением (4.15).

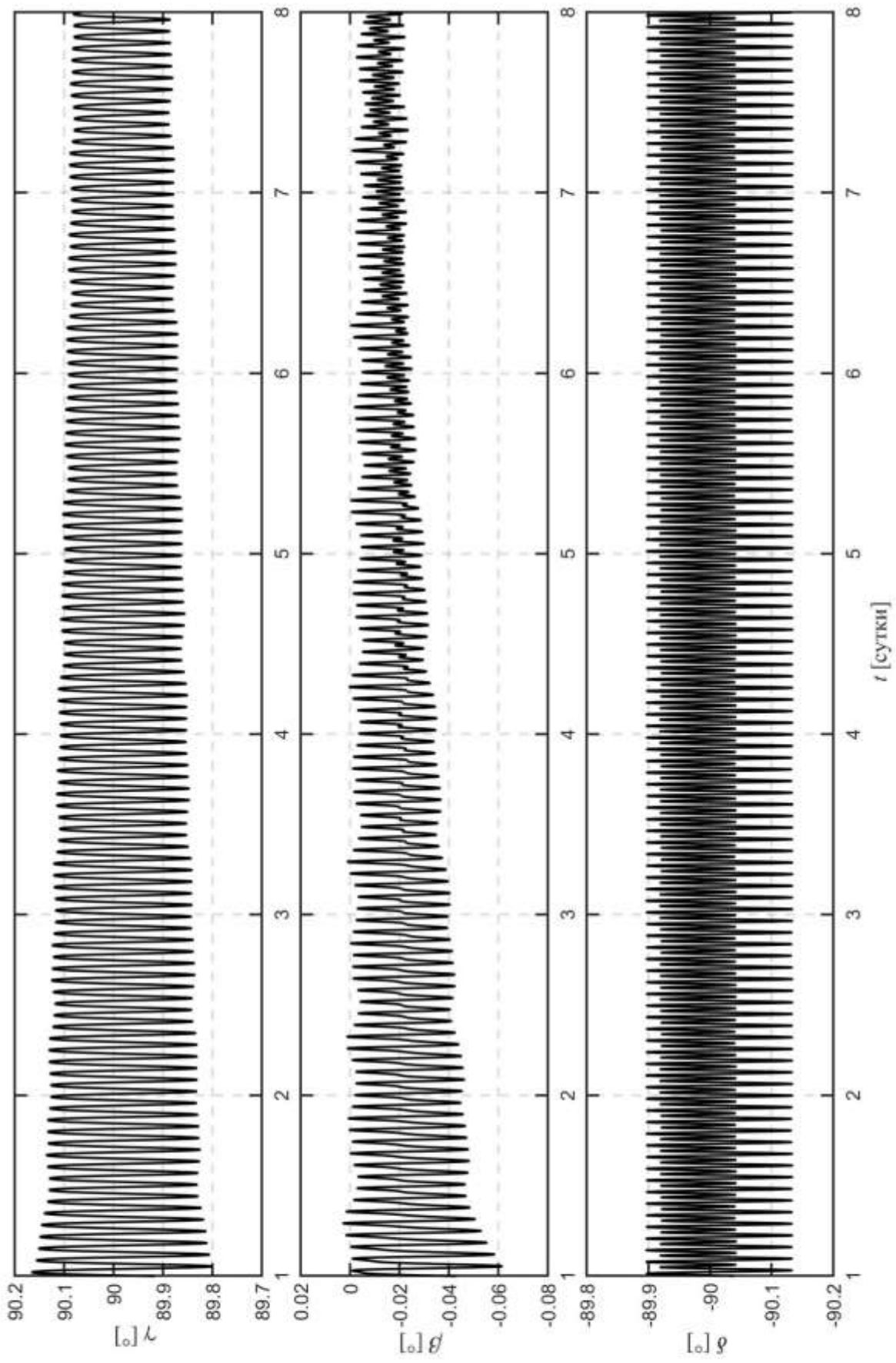


Рис. 4.8. Углы ориентации КА в режиме его орбитальной ориентации с управлением (4.19).

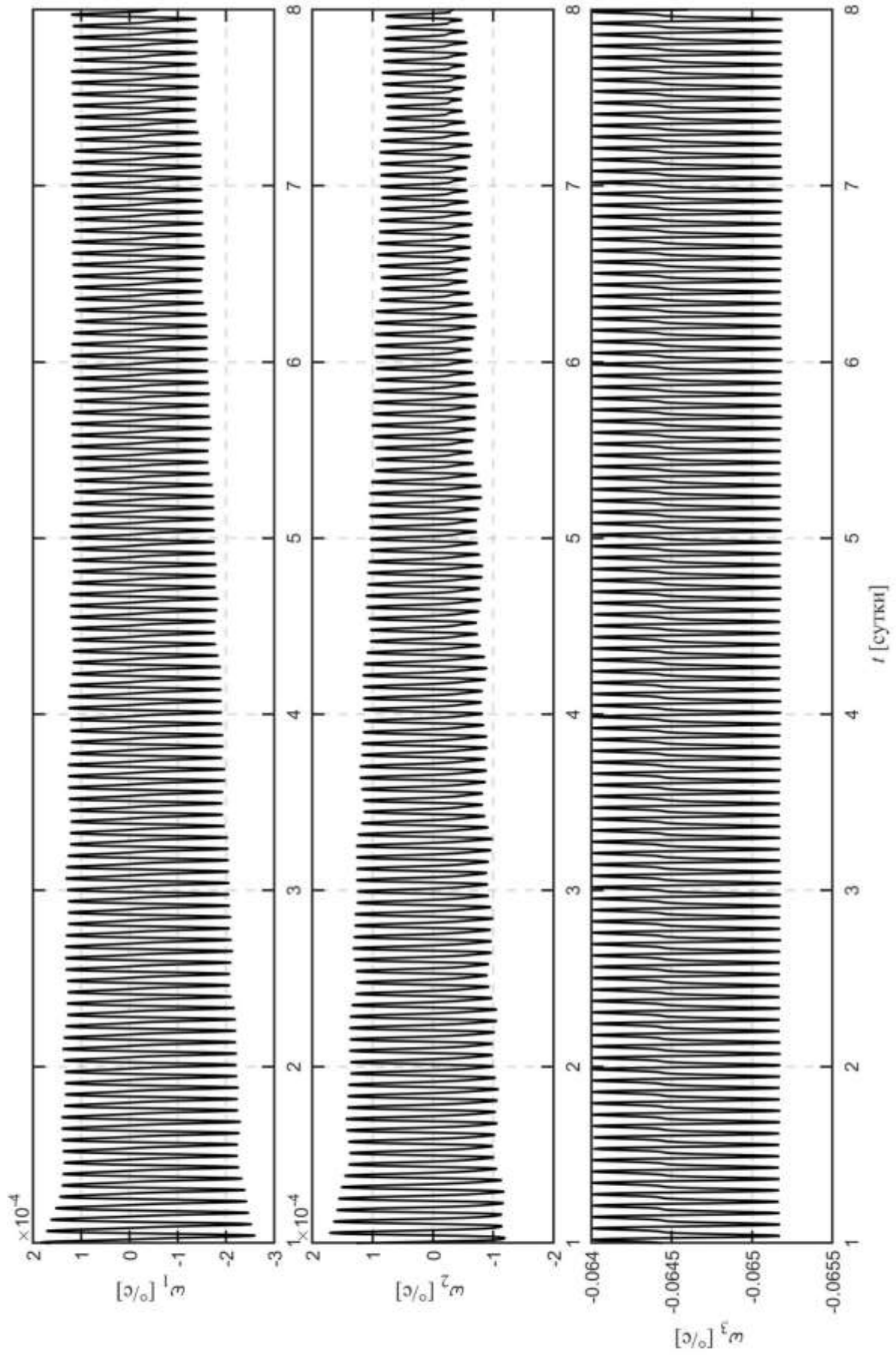


Рис. 4.9. Угловая скорость КА в режиме его орбитальной ориентации с управлением (4.19).

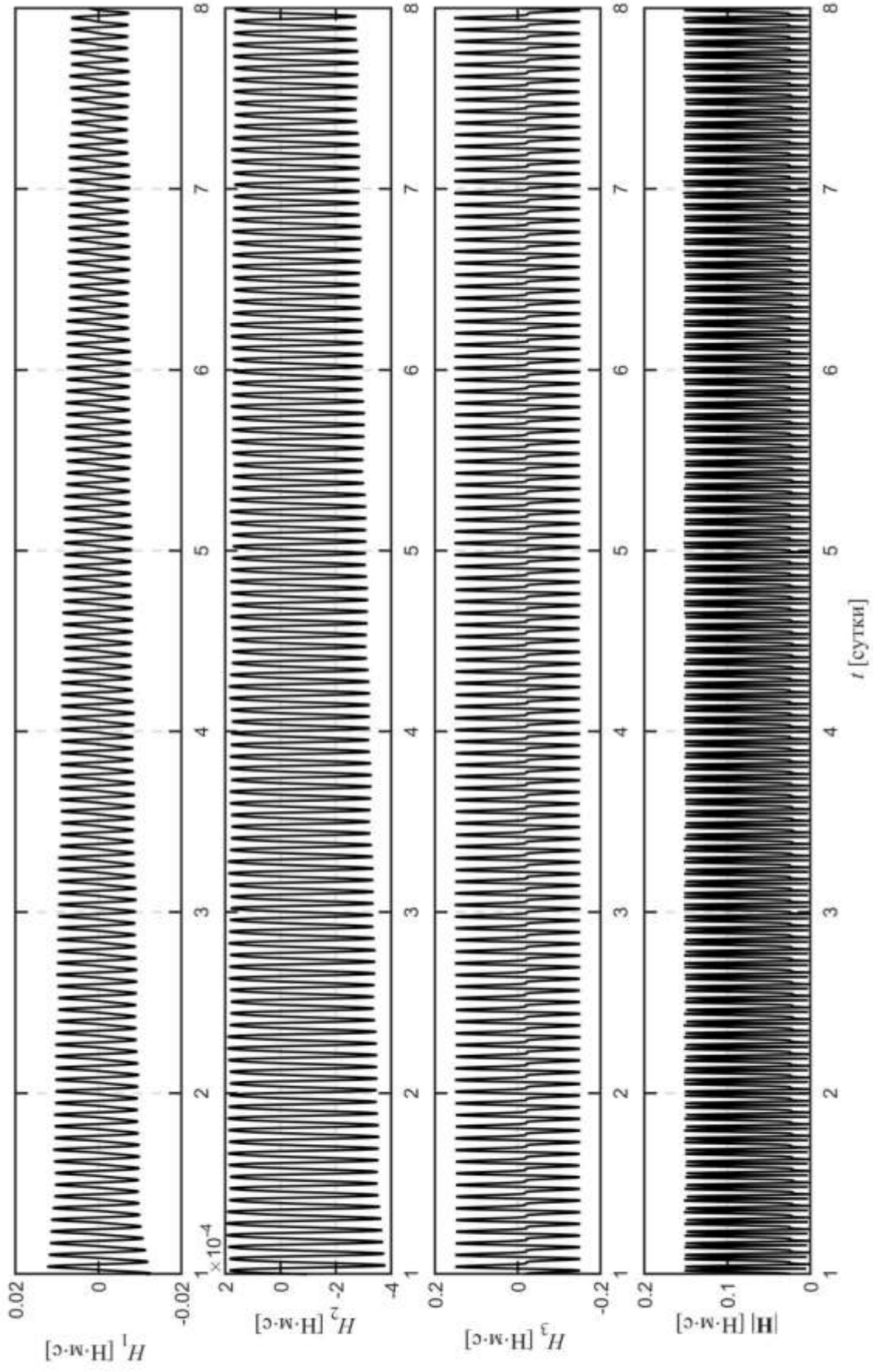


Рис. 4.10. Гиросtatический момент КА в режиме его орбитальной ориентации с управлением (4.19).

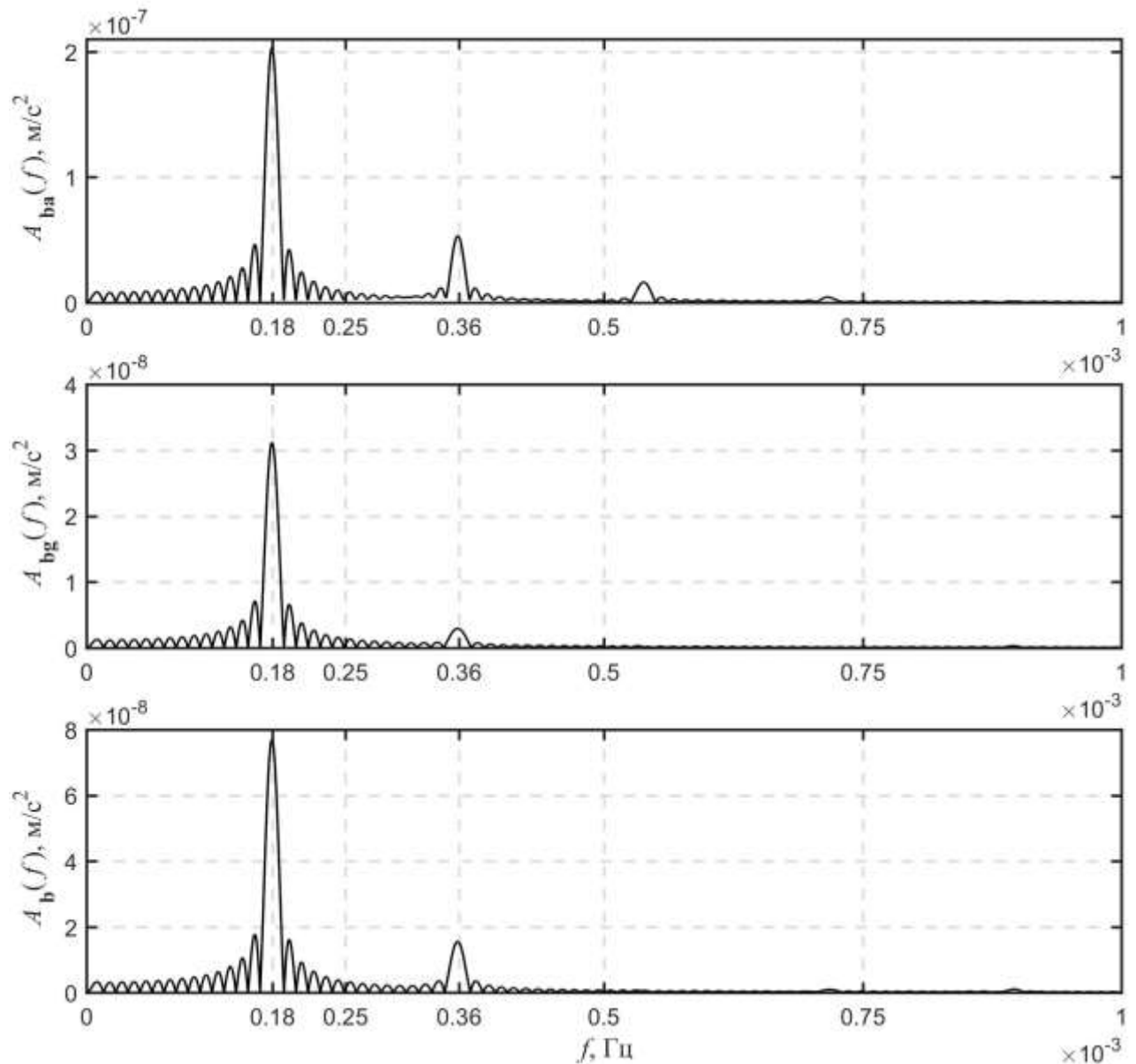


Рис. 4.11. Амплитудные спектры микроускорений.

4.2 Управление угловым движением космического аппарата с помощью электромагнитной системы ориентации

Выше в этой главе была рассмотрена возможность реализации с помощью гиросистемы режима орбитальной ориентации КА близкой к гравитационно устойчивой. Покажем, что для поддержания такой ориентации КА можно использовать и электромагнитные органы управления (электромагниты). Следует отметить, что в диссертационной работе не учитывается возможность наличия остаточной намагниченности электромагнитов.

4.2.1 Уравнения углового движения космического аппарата

Космический аппарат считаем твердым телом, центр масс которого движется по геоцентрической орбите. Уравнения движения КА состоят из двух подсистем (см. п. 1.3). Подсистема уравнений углового движения образована динамическими уравнениями Эйлера и кинематическими уравнениями для кватерниона ориентации (1.9). В уравнениях Эйлера учитываются гравитационный $\mathbf{M}_g$ (1.5) и аэродинамический моменты $\mathbf{M}_a$ (1.6), а также магнитный момент $\mathbf{M}_m$ (1.7), создаваемый взаимодействием электромагнитов с МПЗ. Таким образом, уравнения Эйлера представим в виде

$$\hat{I} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \hat{I} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_m. \quad (4.23)$$

Чтобы замкнуть подсистему уравнений углового движения КА к ним надо добавит соотношения, описывающие изменение вектора $\mathbf{L}$ собственного магнитного момента электромагнитов, входящего в выражение (1.7).

4.2.2 Режим гравитационной ориентации космического аппарата

Чтобы пояснить закон стабилизации режима гравитационной ориентации КА магнитным моментом, рассмотрим более простые уравнения, учитывающие только главные факторы. А именно, предположим, что орбита центра масс КА круговая и неизменна в абсолютном пространстве, имеет радиус r и наклонение i ; на КА действуют только гравитационный момент и магнитный момент, создаваемый электромагнитами; модель МПЗ представляет собой **прямой диполь** (см. п. 1.2). Угловое движение такого КА описывается уравнениями

$$I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)(\omega_2 \omega_3 - 3\omega_0^2 u_{32} u_{33}) + L_2 B_3 - L_3 B_2, \quad (4.24)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)(\omega_1 \omega_3 - 3\omega_0^2 u_{31} u_{33}) + L_3 B_1 - L_1 B_3,$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)(\omega_1 \omega_2 - 3\omega_0^2 u_{31} u_{32}) + L_1 B_2 - L_2 B_1,$$

$$\dot{\gamma} = \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \quad \dot{\delta} = \frac{\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma}{\cos \beta} - \omega_0,$$

$$\dot{\beta} = \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma,$$

$$B_i = \sum_{j=1}^3 B_{xi} u_{ji}, \quad i = \overline{1,3}, \quad \dot{u} = \omega_0.$$

Здесь $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)^T$, $\mathbf{B}_X = (B_{x1}, B_{x2}, B_{x3})^T$, выражения для B_{xi} , $i = \overline{1,3}$, представлены в п. 1.2, а величины u_{3i} выражаются через углы γ , δ и β по формулам (1.1).

При $\mathbf{L} = 0$ уравнения (4.24) автономны и допускают 24 стационарных решения [154]. Ниже в этой главе будем рассматривать только четыре стационарных решения, которые можно задать соотношениями

$$\sin \gamma = \sin \delta = \beta = 0, \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = \omega_0 \cos \gamma. \quad (4.25)$$

Эти решения описывают положения равновесия КА в орбитальной системе координат. В них оси Ox_1 и Ox_2 совпадает с осями $\pm OX_3$ и $\pm OX_2$ соответственно. Выбор знаков здесь произволен. Достаточные условия устойчивости по Ляпунову решений (4.25) выражаются неравенствами [154]: $I_1 < I_3 < I_2$. Для рассматриваемых в п. 1.3 параметров КА указанные выше условия выполняются. Решения (4.25) реализуют режим гравитационной ориентации КА в простейшей ситуации.

Из-за разного рода возмущающих факторов (эллиптичность орбиты, аэродинамический момент и др.) система (1.9), (4.23) не имеет решений, точно соответствующих решениям (4.25). Но она имеет решения, для которых соотношения (4.25) выполнены приближенно на некотором не очень продолжительном отрезке времени. Движения КА, описываемые такими решениями, представляют собой режим гравитационной ориентации в ситуации, приближенной к реальной. Чтобы обеспечить достаточно точное выполнение соотношений (4.25) длительное время (т.е. стабилизировать режим гравитационной ориентации), можно использовать управляющий момент (1.7), создаваемый электромагнитами.

4.2.3 Управление угловым движением космического аппарата

Дипольный момент электромагнитов, обеспечивающий стабилизацию режима гравитационной ориентации КА, будем искать в виде [156]

$$\mathbf{L} = \kappa_u \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}, \quad (4.26)$$

где $\kappa_u > 0$ – постоянный коэффициент, $\mathbf{u}$ – управление, вид которого предстоит установить. Подставив выражение (4.26) в формулу (1.7), получим формулу для момента, создаваемого электромагнитами,

$$\mathbf{M}_m = -\kappa_u \mathbf{u} + \frac{\kappa_u (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})}{|\mathbf{B}|^2} \mathbf{B}. \quad (4.27)$$

Если в последней формуле отбросить слагаемое $\kappa_u |\mathbf{B}|^{-2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$, то она перейдет в формулу

$$\mathbf{M}_m = -\kappa_u \mathbf{u}, \quad (4.28)$$

которая обеспечила бы широкие возможности для построения законов управления. Слагаемое $\kappa_u |\mathbf{B}|^{-2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$ сужает эти возможности, но если осуществлять управление на промежутках времени длиной виток и более, то в ряде случаев влияние этого слагаемого можно нивелировать. Положительным фактором здесь будет являться достаточно большое наклонение орбиты КА.

Закон управления магнитным моментом электромагнитов, стабилизирующий режим гравитационной ориентации, построим исходя из энергетических соображений. Обобщенная энергия механической системы, описываемой уравнениями (4.24) в случае $\mathbf{L} = 0$, выражается формулой [154]

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \left(\omega_i^2 - 2\omega_0 \omega_i u_{2i} + 3\omega_0^2 u_{3i}^2 \right),$$

а ее производная по времени в силу уравнений (4.24) имеет вид

$$\dot{E} = \mathbf{L} \cdot [\mathbf{B} \times (\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2)].$$

При $\mathbf{L} = 0$ обобщенная энергия является первым интегралом уравнений (4.24). Этот интеграл использовался в [154] в качестве функции Ляпунова при

исследовании устойчивости стационарных решений (4.25). На этих решениях и только на них E достигает глобального минимума, равного $E_{\min} = \omega_0^2(3I_1 - I_2)/2$.

Примем закон управления в виде (4.26), взяв

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2. \quad (4.29)$$

Система (4.24), (4.26), (4.29) допускает указанные выше 24 стационарных решения и соотношение

$$\dot{E} = -\frac{\kappa_u}{|\mathbf{B}|^2} |(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2) \times \mathbf{B}|^2.$$

В силу последнего соотношения и при выполнении достаточных условий устойчивости $I_1 < I_3 < I_2$ обобщенная энергия КА убывает. Для почти всех начальных условий это убывание заканчивается достижением малой окрестности одного из стационарных решений (4.25). Эти решения асимптотически устойчивы. Остальные 20 стационарных решений системы (4.24), (4.26), (4.29) экспоненциально неустойчивы, и в них $E > E_{\min}$. Таким образом, закон управления (4.29) обеспечивает стабилизацию режима гравитационной ориентации КА.

Строгое доказательство сделанных утверждений опирается на теоремы 14.1 и 15.1 монографии [166], условиям которых удовлетворяет система (4.24), (4.26), (4.29). Надо только убедиться, что множество $(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2) \times \mathbf{B} = 0$ в расширенном фазовом пространстве системы (4.24) при $\mathbf{L} = 0$ не содержит ее целых полутраекторий в окрестности каждого стационарного решения (4.25). Проверку этого факта можно свести к анализу линеаризованных уравнений.

Закон (4.29) можно рассмотреть и с другой точки зрения. Создаваемый по этому закону управляющий момент $\mathbf{M}_m$ запишем в виде (4.28)

$$\mathbf{M}_m = -\kappa_u (\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2).$$

Если этот момент подставить в уравнения (4.24) вместо момента $\mathbf{L} \times \mathbf{B}$, то получим систему с производной обобщенной энергии $\dot{E} = -\kappa_u |\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2|^2$. В

окрестности положений равновесия (4.25) такая система является системой с полной диссипацией, и эти положения равновесия оказываются асимптотически устойчивыми. В окрестности положения равновесия $\gamma = \delta = 0$ имеем $\mathbf{M}_m = -\kappa_u (\dot{\gamma}, \dot{\delta}, \dot{\beta})^T$. При подходящем выборе κ_u такой момент обеспечивает достаточно быстрое гашение возмущенного движения КА. Учет отброшенного слагаемого $\kappa_u |\mathbf{B}|^{-2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$ в формуле (4.27) увеличивает время переходного процесса, но, как было сказано выше, в случае достаточно большого наклона орбиты КА это увеличение не будет значительным.

Асимптотическая устойчивость стационарных решений (4.25) мотивирует использовать закон управления (4.29) для стабилизации решений системы (1.9), (4.23), описывающих режим гравитационной ориентации КА. В случае системы (1.9), (4.23), (4.26) в законе (4.29) следует взять

$$\omega_0(t) = \frac{|\mathbf{r} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r})|}{r^2},$$

где $\boldsymbol{\omega}_E = \omega_E (w_{31}, w_{32}, w_{33})^T$ ($\boldsymbol{\omega}_E = (0, 0, \omega_E)^T$ в гринвичской системе координат). Ниже полагаем, что величина ω_0 определена выписанной формулой. Для почти круговой орбиты рассматриваемого в п. 1.3. КА на отрезке времени в несколько суток можно взять $\omega_0 = \text{const}$. На решениях системы (1.9), (4.23), (4.26), (4.29) рассмотрим функцию E . Ее производная $\dot{E}$ будет теперь отрицательной лишь при достаточно большом значении $|\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2|$. С убыванием E уменьшается и $\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2$. В результате функция E , не достигнув минимума, начинает колебаться в окрестности некоторого значения, которое при правильном выборе коэффициента κ_u будет близко к $E_{\min}$. Это значит, что соответствующее решение системы (1.9), (4.23), (4.26), (4.29) будет приблизительно удовлетворять одному из соотношений (4.25).

Для реализации закона (4.29) необходимо располагать информацией об угловой скорости и ориентации КА. Ее можно получить, обрабатывая на борту КА показания датчика угловой скорости и трехосного магнитометра. Известны

примеры успешного решения этой задачи. Такая обработка позволяет получить полную информацию о угловом движении КА.

Стационарные решения (4.25) при $\gamma = 0$ можно стабилизировать, используя вместо (4.29) закон

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_2, \quad (4.30)$$

при $\gamma = \pi$ надо взять $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} + \omega_0 \mathbf{e}_2$. Преимущество закона (4.30) перед законом (4.29) в том, что для его реализации необходимо иметь информацию только о векторах $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{B}$. Эту информацию можно получить непосредственно от бортовых датчиков без сложной обработки.

Возможна еще одна реализация закона управления, стабилизирующего режим гравитационной ориентации. Управление возьмем в виде [47, 90]

$$\mathbf{u} = \hat{K}_1 (\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2) + \hat{K}_2 [(\mathbf{E}_2 \times \mathbf{e}_2) + (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{E}_3)], \quad (4.31)$$

где $\hat{K}_1 = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$, $\hat{K}_2 = \text{diag}(k'_1, k'_2, k'_3)$ – постоянные матрицы с положительными диагональными элементами. Закон управления (4.26), (4.31) позволяет реализовать более точную ориентацию КА.

Проверку устойчивости решений систем (1.9), (4.23), (4.26) с законами (4.30) и (4.31), а также параметрическое исследование самих законов управления также можно свести к анализу линеаризованной системы уравнений, но далее в этой главе будет использован иной способ проверки, основанный на методе, который был предложен во второй главе диссертационной работы.

4.2.4 Математическое моделирование режима гравитационной ориентации

Цель моделирования – показать, что предложенные законы управления (4.30) и (4.31) обеспечивают гашение возмущенного движения КА и стабилизацию его в режиме гравитационной ориентации.

В предлагаемой системе управления КА каждая компонента L_i , $i = \overline{1,3}$, вектора $\mathbf{L}$ реализуется собственным электромагнитом. Система имеет три

одинаковых электромагнита [90, 167]. Их дипольные моменты, реализующих компоненты L_i параллельны осям Ox_i , $i=\overline{1,3}$, соответственно. Возможные способы реализации электромагнитов приведены в [90, 167]. Геометрические и массово-инерционные характеристики КА, использованные при моделировании указаны в п. 1.3, в качестве начальных условий уравнений движения центра масс использовались параметры **Орбиты I (а)**.

Начальные условия движения при моделировании задавались в виде

$$\gamma(0) = \delta(0) = \beta(0) = 0, \quad \omega_1(0) = \omega_2(0) - \omega_0 = \omega_3(0) = 0.01^\circ/\text{с}.$$

Полагаем, что такие начальные условия формируются штатной системой управления ориентацией КА. Решения уравнений (1.9), (4.23) с такими начальными условиями вычислялись на отрезке 6 суток. Результаты интегрирования уравнений (1.9), (4.23) с управлением (4.26), (4.30) при значении $\kappa_u = 7.5 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ приведены на рис. 4.12 – 4.14. Представлены графики зависимости от времени углов γ , δ , β , компонент векторов угловой скорости ω_i и магнитного момента электромагнитов L_i , $i=\overline{1,3}$. На рис. 4.15 – 4.17 показаны аналогичные графики, полученные в результате интегрирования системы (1.9), (4.23) с управлением (4.26), (4.31) при значениях $\kappa_u = 7.5 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, $k_1 = 10$, $k_2 = 5$, $k_3 = 6$, $k'_1 = 0.012 \text{ с}^{-1}$, $k'_2 = 0.010 \text{ с}^{-1}$, $k'_3 = 0.003 \text{ с}^{-1}$. В левой части каждого из графиков показан переходной процесс, обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости. Графики величин при переходном процессе охватывают отрезок времени, который примыкает к начальной точке $t=0$ и имеет длину 3 часа при использовании закона (4.30) и 6 часов при использовании (4.31). Графики в правой части рисунков иллюстрируют движение КА в установившемся режиме после окончания переходного процесса. В этом режиме имеют место колебания рассматриваемых функций с доминирующей орбитальной частотой $f_0 = \omega_0/2\pi$. Видно, что оба закона управления обеспечивают гашение возмущенного движения КА и стабилизацию его в режиме гравитационной ориентации. При этом величина дипольного

момента каждого из магнитов в установившемся режиме движения КА не превышает значения $3 \text{ А} \cdot \text{м}^2$.

В работах [90, 167] показано, что описанную стабилизацию режима гравитационной ориентации нет необходимости выполнять непрерывно. Если после гашения возмущенного движения, которое занимает несколько часов, стабилизацию прекратить, то режим будет сохраняться в течение нескольких суток. После того, как возмущенное движение достигнет неприемлемых амплитуд, его гашение стоит повторить.

Рассматриваемые способы управления электромагнитами могут быть реализованы с помощью отдельной аппаратуры, слабо связанной с остальными бортовыми системами КА, подобно аппаратам «Мираж», «Гравитон» и «КСКМ», которые использовались на некоторых КА серий «Фотон» и «Бион».

4.2.5 Периодическая аппроксимация ориентированного движения космического аппарата

Анализ рис. 4.12 – 4.14 и 4.15 – 4.17 показывает, что установившийся режим гравитационной ориентации КА похож на двухчастотное условно-периодическое движение с частотами $f_0 = \omega_0/2\pi$ и $f_E = \omega_E/2\pi$. Основываясь на этом свойстве, построим аппроксимации режима гравитационной ориентации КА набором периодических движений с частотами близкими к f_0 . Используем для этих целей метод, предложенный во второй главе данной работы, т.е. на каждом орбитальном витке – между последовательными прохождениями восходящего узла орбиты – построим аппроксимирующее периодическое движение (см. п. 2.4). Уравнения углового движения КА возьмем в виде (1.9), (4.23) положив в (1.9) $\omega_E = 0$ и приняв в формулах для расчета координат и компонент скорости точки O в «замороженной» гринвичской системе формулы кеплерова движения. Получившуюся систему уравнений обозначим (4.32). Время входит в эту систему периодически с орбитальным периодом, поэтому можно поставить задачу об отыскании ее периодических решений. Интерес

представляет такое периодическое решение, которое аппроксимирует установившееся решение решения исходной системы (1.9), (4.23) на данном витке.

Построение периодического решения системы (4.32) сводится к решению для этой системы периодической краевой задачи

$$\omega(t_0) = \omega(t_0 + T), \quad Q(t_0) = Q(t_0 + T). \quad (4.33)$$

Здесь t_0 – момент прохождения начального восходящего узла орбиты на витке аппроксимации, T – период используемой в системе (4.32) кеплеровой орбиты. Задача (4.32), (4.33) решается методом пристрелки. Краевые условия (4.33) рассматриваются как уравнения для определения неизвестных начальных условий $\omega(t_0)$, $Q(t_0)$. Кватернион $Q(t)$ должен быть нормированным, в процессе решения задачи (4.32), (4.33) это обстоятельство учитывается следующим образом.

Вариацию решения $\omega(t)$, $Q(t)$ системы (4.32) на каждой итерации метода пристрелки представим в виде

$$\Delta\omega(t), \quad \Delta Q(t) = \frac{1}{2} Q(t) \circ \theta(t),$$

где $\theta(t)$ – вектор бесконечно малого поворота, задающего изменение ориентации КА в окрестности положения $Q(t)$. Вектор $\theta(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{\theta} + \omega(t) \times \theta = \Delta\omega(t)$, а вектор $\Delta\omega(t)$ – системе уравнений в вариациях для уравнений (4.23) (в этой системе вариации векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ можно вычислять по формулам $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} \times \theta$, $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v} \times \theta$ и $\Delta\mathbf{B} = \mathbf{B} \times \theta$). Подстановка варьируемого решения в краевые условия (4.33) приводит к соотношениям

$$Q(t_0 + T) \circ \theta(t_0 + T) - Q(0) \circ \theta(0) = 2[Q(t_0) - Q(t_0 + T)],$$

$$\Delta\omega(t_0 + T) - \Delta\omega(t_0) = \omega(t_0) - \omega(t_0 + T).$$

Величины $\theta(t_0 + T)$, $\Delta\omega(t_0 + T)$ входят в эти соотношения в виде линейных комбинаций величин $\theta(t_0)$, $\Delta\omega(t_0)$ (что требует интегрирования 6 экземпляров систем уравнений в вариациях для $\Delta\omega$ и θ на отрезке $[t_0, t_0 + T]$). Полученные

соотношения рассматриваются как линейные уравнения относительно $\theta(t_0)$, $\Delta\omega(t_0)$. Эти уравнения выглядят переопределенными, но на самом деле среди них не более шести линейно независимых. Решение этих уравнений находится с помощью процедуры сингулярного разложения их матрицы. Величины $[Q(t_0) + \Delta Q(t_0)] / \|Q(t_0) + \Delta Q(t_0)\|$ и $\omega(t_0) + \Delta\omega(t_0)$ принимаются в качестве новых значений $Q(t_0)$ и $\omega(t_0)$. Итерации заканчиваются, когда поправки $|\theta(t_0)|$, $|\Delta\omega(t_0)|$ станут меньше заданных пределов. Начальным приближением начальных условий периодического решения служат значения переменных системы (1.9), (4.23) в точке t_0 .

На рис. 4.18, 4.19 приведены результаты аппроксимации компонент векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ системы уравнений движения центра масс КА (1.3), представленных в проекциях на оси гринвичской системы координат. На рис. 4.20, 4.21 приведены результаты аппроксимации рассмотренного ранее решения системы (1.9), (4.23) с управлением (4.26), (4.31) решениями краевой задачи (4.32), (4.33). Все результаты представлены на интервале времени 6 суток. На рис. 4.20, 4.21 изображены графики зависимости от времени компонент q_j , $j = \overline{0,3}$, кватерниона Q ориентации КА и компонент угловой скорости ω_i , $i = \overline{1,3}$. Графики аппроксимируемого решения показаны черным цветом, графики аппроксимирующих решений – красным. При построении аппроксимации не учитывался участок переходного процесса, т.е. аппроксимация построена на участке установившегося движения КА. Начальное приближение при решении краевой задачи задавалось следующими начальными условиями в соответствующих точках t_0 :

$$\gamma(0) = \delta(0) = \beta(0) = 0, \quad \omega_1(0) = \omega_2(0) - \omega_0 = \omega_3(0) = 0.$$

Графики аппроксимирующих решений в малых окрестностях моментов прохождения восходящих узлов орбиты налегают друг на друга (см. рис. 2.13), но в данном случае при выбранном масштабе графиков налегания практически не заметны.

Удобство построенной аппроксимации заключается в том, что, рассмотрев семейство решений краевой задачи (4.32), (4.33) для различных значений долготы восходящего узла орбиты в «замороженной» гринвичской системе координат и вычислив мультипликаторы этого семейства, можно получить детальную информацию о свойствах устойчивости режима гравитационной ориентации КА, выбрать подходящие параметры законов управления и сами эти законы.

На рис. 4.22 (верхний рисунок) представлен график степени устойчивости решений краевой задачи (4.32), (4.33), использованных для аппроксимации углового движения КА при управлении (4.26), (4.30). В данном случае, под степенью устойчивости имеется в виду взятый с отрицательным знаком наименьший из всех характеристических показателей [148] системы уравнений в вариациях, т.е.

$$\zeta = -\frac{1}{T} \ln \rho, \quad (4.34)$$

где ρ – максимум модулей мультипликаторов системы уравнений в вариациях, для решения задачи (4.32), (4.33). Степень устойчивости вычислена для каждого витка орбиты КА, поэтому график ее зависимости от времени представляет собой кусочно-постоянную функцию – на витке степень устойчивости постоянна, в восходящих узлах орбиты она меняется скачком.

На рис. 4.22 (нижний рисунок) аналогичным образом представлен график степени устойчивости решений краевой задачи краевой задачи (4.32), (4.33), использованных для аппроксимации углового движения КА при управлении (4.26), (4.31). Как видно из рисунков, все аппроксимирующие периодические решения асимптотически устойчивы.

Основные результаты главы 4

В четвертой главе диссертационной работы показано, что с помощью гироскопических исполнительных органов системы управления угловым движением КА можно реализовать режим длительной орбитальной ориентации

КА как в окрестности как гравитационно устойчивого, так и неустойчивого положения равновесия. Приведены соответствующие законы управления собственным кинетическим моментом гиросистемы. В качестве основного режима при реализации орбитальной ориентации КА в окрестности устойчивого положения равновесия рассмотрен режим гиродемпфирования, для которого приведены результаты численного моделирования микроускорений, возникающих на борту КА, а также их амплитудные спектры. Показано, что данный режим может использоваться при проведении космических экспериментов в течение длительных интервалов времени.

Дополнительно рассмотрены еще два варианта закона управления гиросистемой обеспечивающие орбитальную ориентацию КА в окрестности устойчивого и неустойчивого положения равновесия. Для всех рассмотренных вариантов предложена методика выбора коэффициентов закона управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость углового движения КА. Все предложенные в работе законы управления гиросистемой позволяют не только обеспечивать заданную ориентацию КА, но и ограничивать накопление гиросtatического момента.

Во второй части четвертой главы показано, что устойчивый режим гравитационной ориентации КА можно обеспечить с помощью управления электромагнитами. Предложены два закона управления электромагнитами. Один из них фактически демпфирует угловые скорости КА в окрестности его гравитационной ориентации, при этом для реализации такого закона управления достаточно использовать на борту только показания трехосного магнитометра. Другой предложенный закон управления обеспечивает более точную гравитационную ориентацию КА за счет дополнительного использования информации об угловом положении КА.

Показаны возможности метода, описанного во второй главе диссертационной работы, по исследованию устойчивости установившегося движения КА при стабилизации режима его гравитационной ориентации с помощью электромагнитных исполнительных органов.

Основные полученные результаты:

1. Реализован режим орбитальной ориентации КА с помощью системы гироскопических исполнительных органов. Рассмотрены три варианта закона управления, обеспечивающие орбитальную ориентацию КА как в окрестности гравитационно устойчивого, так и неустойчивого положений равновесия. Предложенный закон помимо поддержания заданной ориентации КА ограничивает накопление собственного кинетического момента гиросистемы. Предложена численно-аналитическая методика выбора параметров для всех вариантов реализации предложенного закона управления.
2. Реализован режим орбитальной ориентации КА в окрестности гравитационно устойчивого положения равновесия с помощью системы электромагнитных исполнительных органов. Для выбора параметров закона управления проведено исследование установившихся движений КА с помощью методики, предложенной в главе 2.

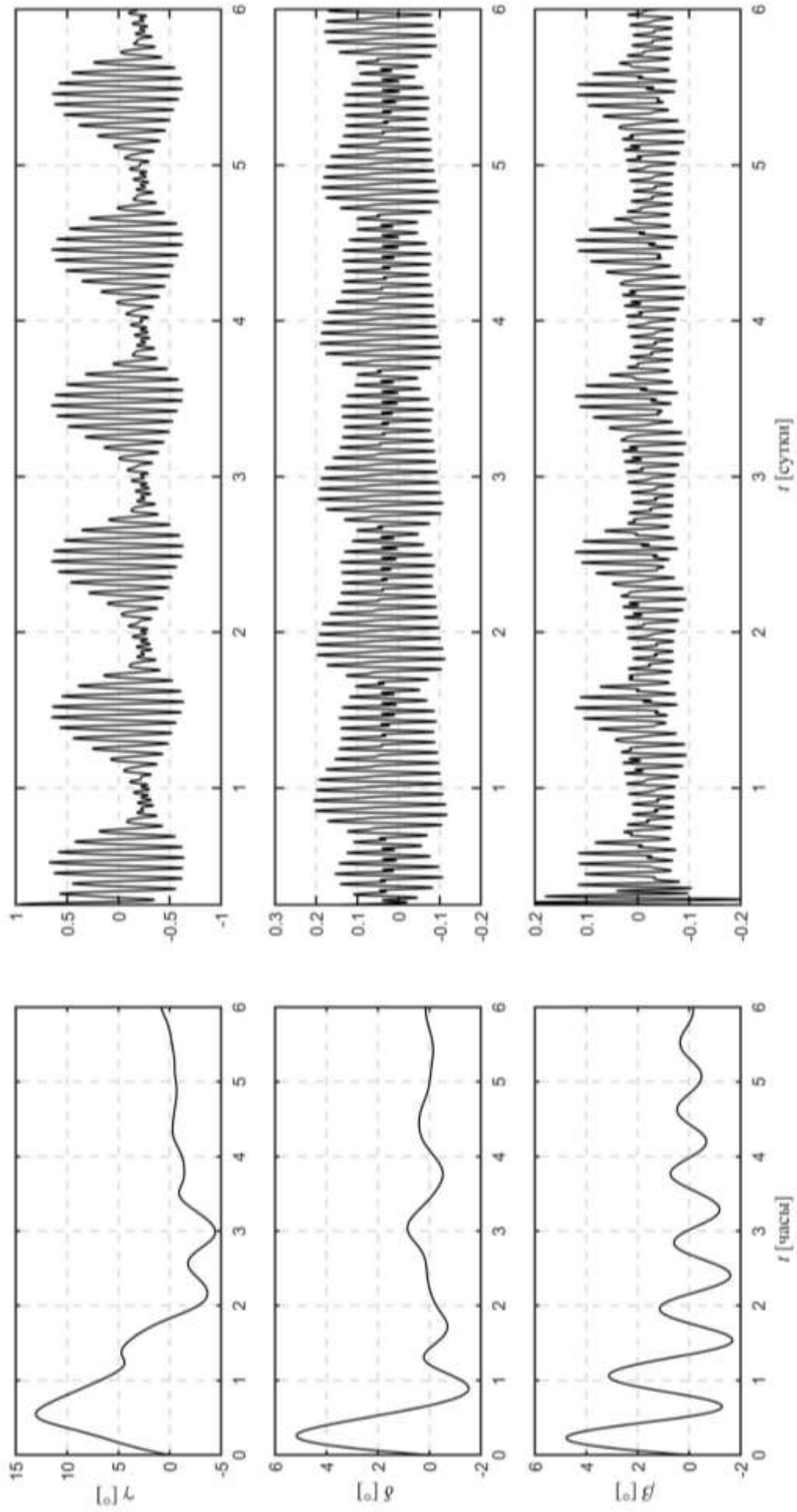


Рис. 4.12. Углы ориентации КА в режиме его гравитационной ориентации с управлением (4.30).

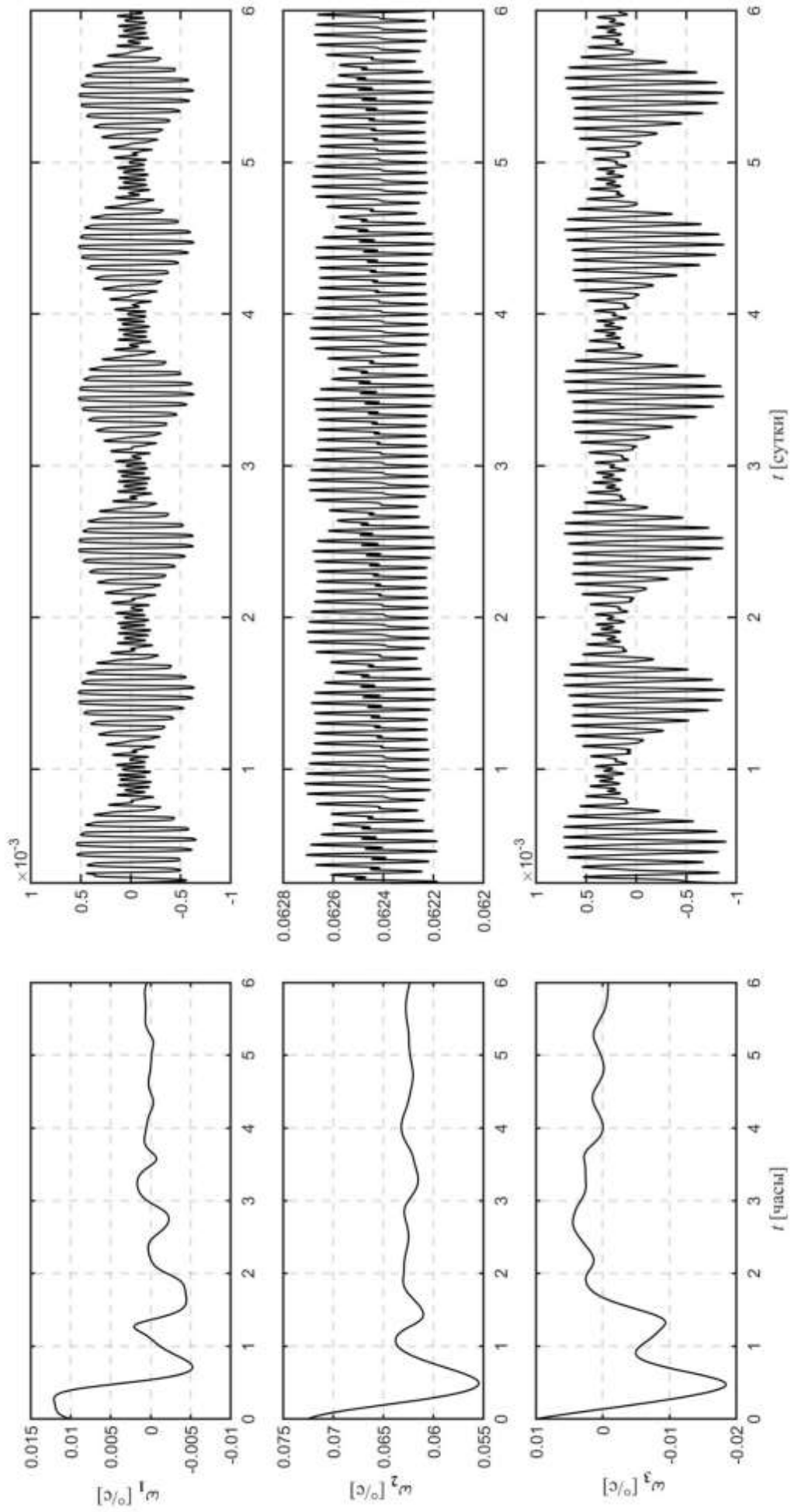


Рис. 4.13. Угловая скорость КА в режиме его гравитационной ориентации с управлением (4.30).

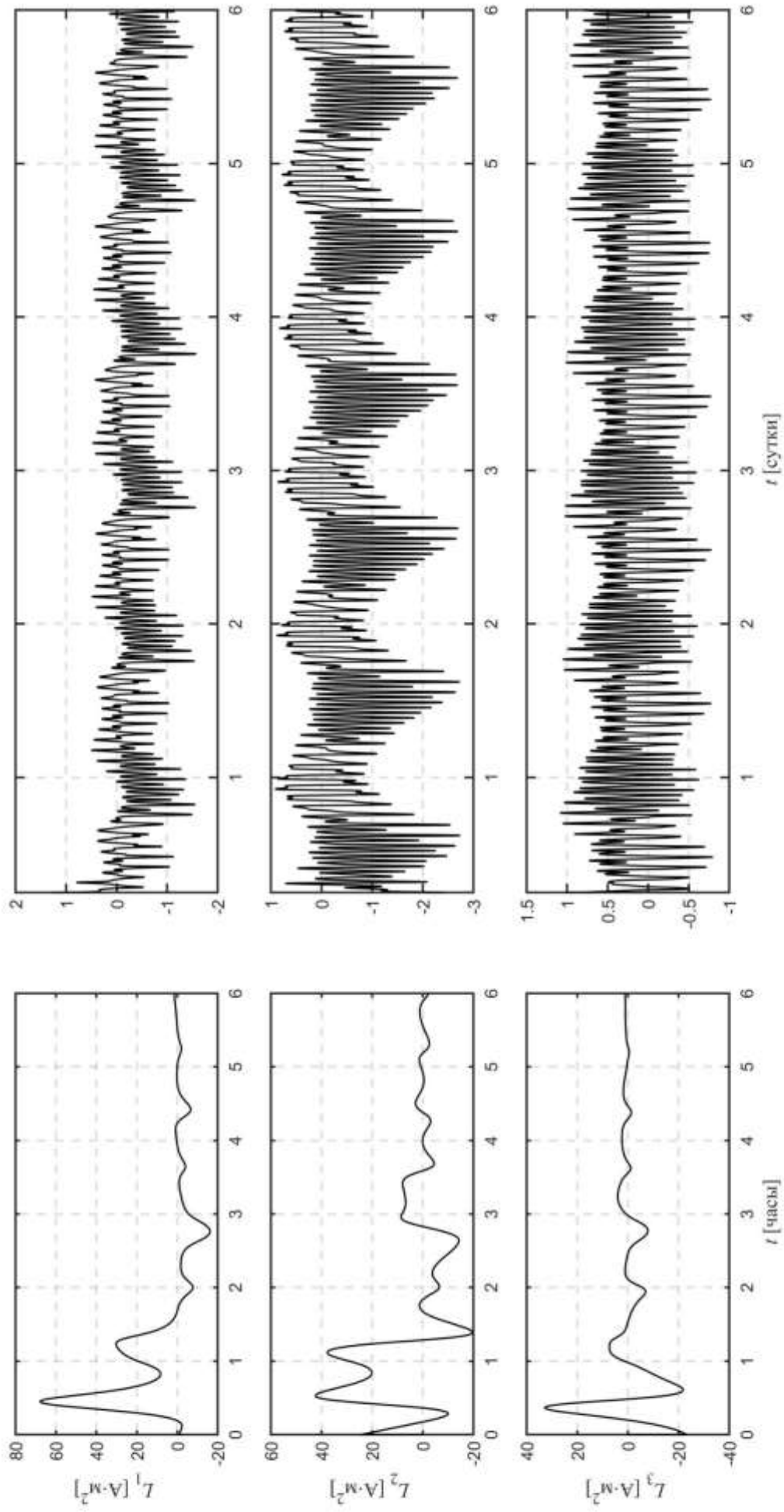


Рис. 4.14. Собственный магнитный момент электромагнитов в режиме гравитационной ориентации КА с управлением (4.30).

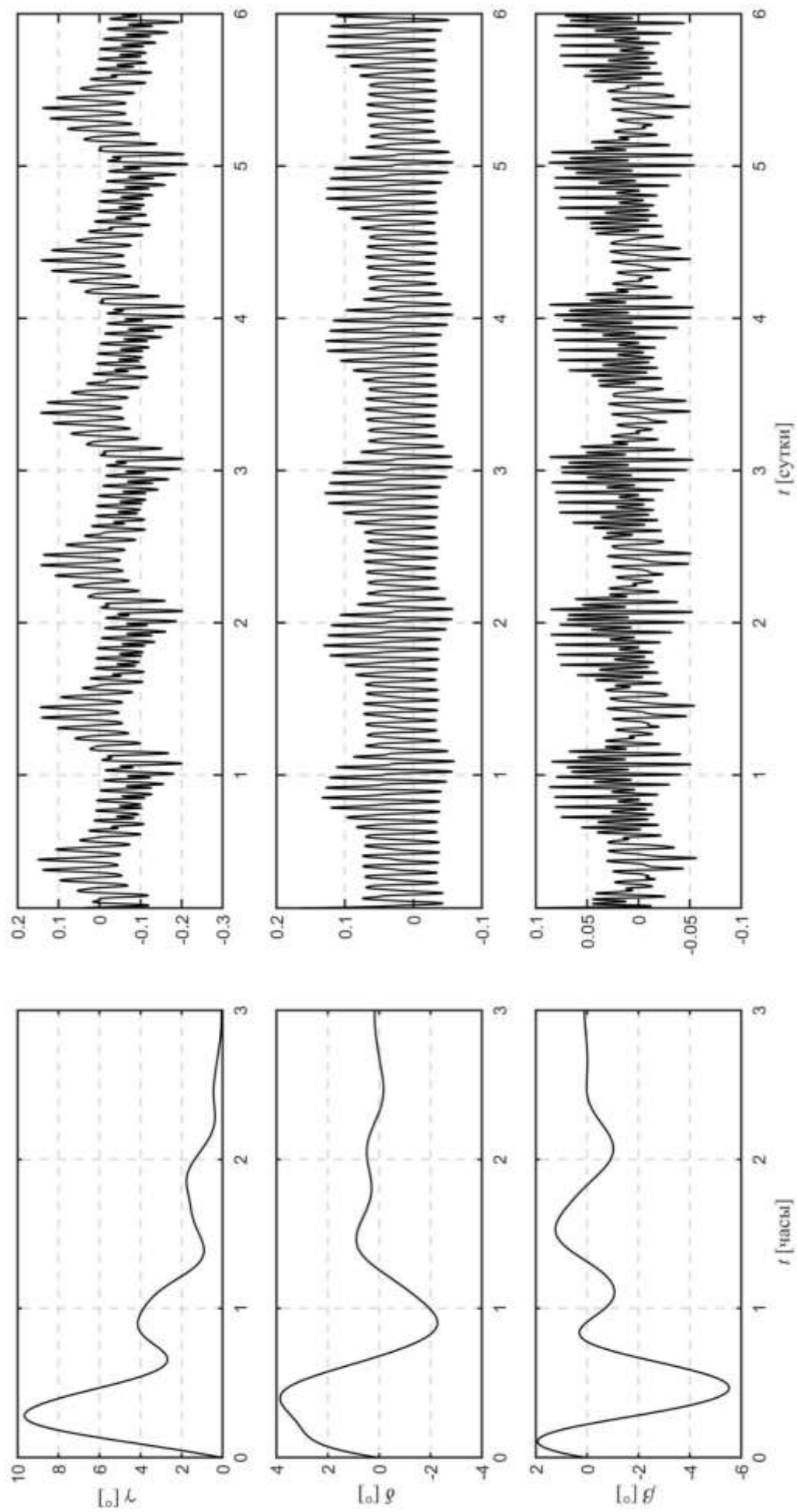


Рис. 4.15. Углы ориентации КА в режиме его гравитационной ориентации с управлением (4.31).

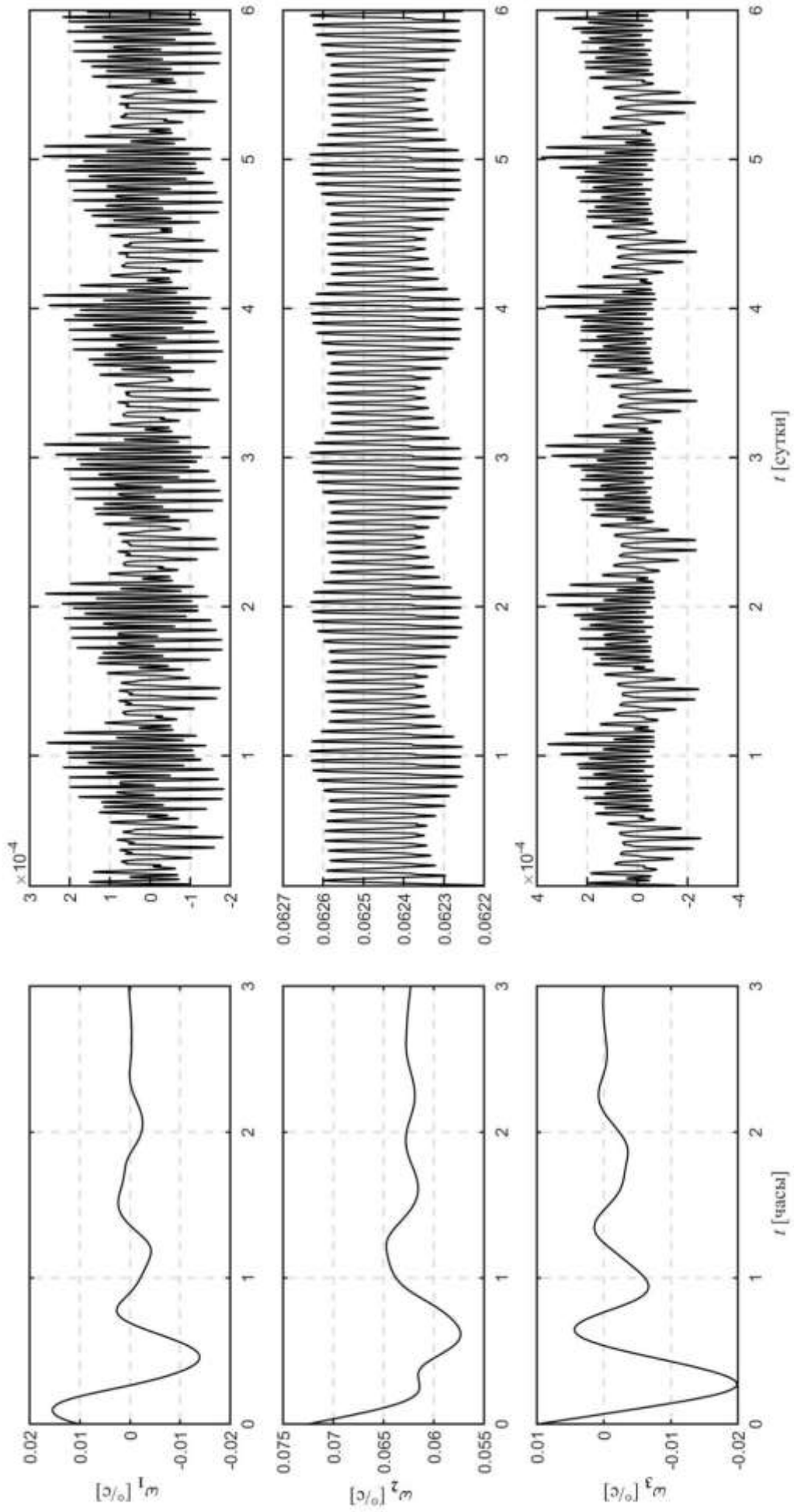


Рис. 4.16. Угловая скорость КА в режиме его гравитационной ориентации с управлением (4.31).

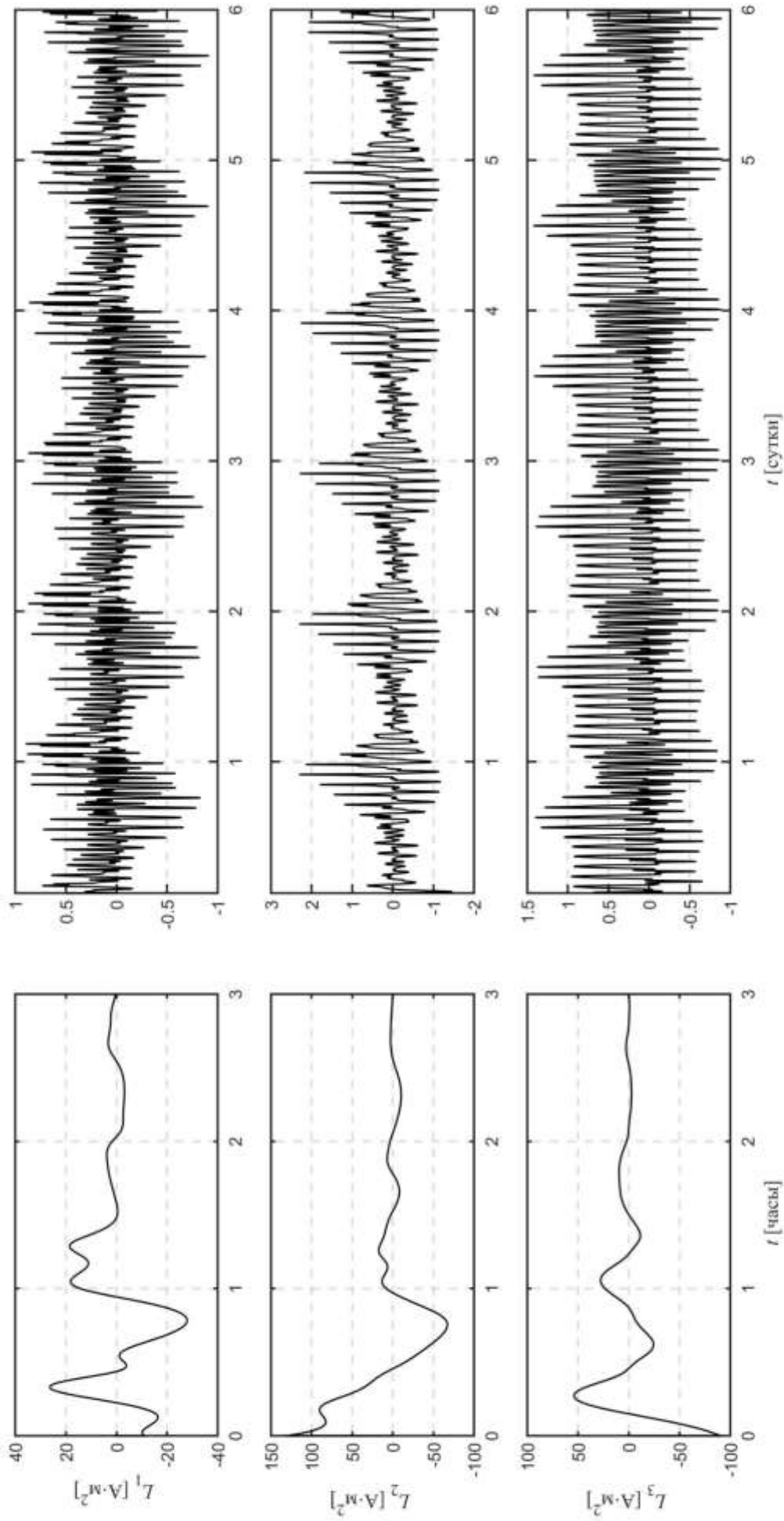


Рис. 4.17. Собственный магнитный момент электромагнитов в режиме гравитационной ориентации КА с управлением (4.31).

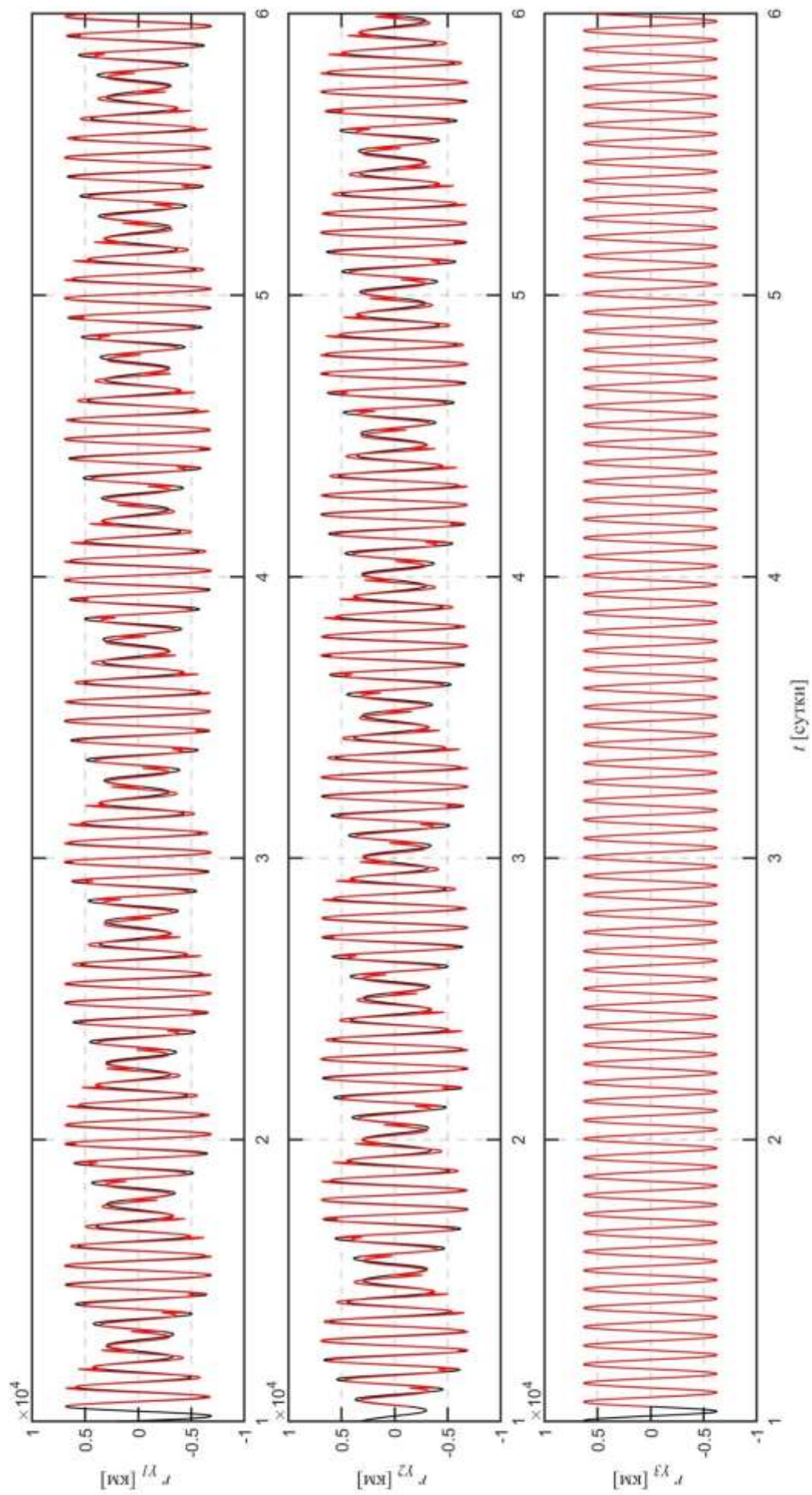


Рис. 4.18. Аппроксимация компонент вектора $\mathbf{r}$ в гринвичской системе координат.

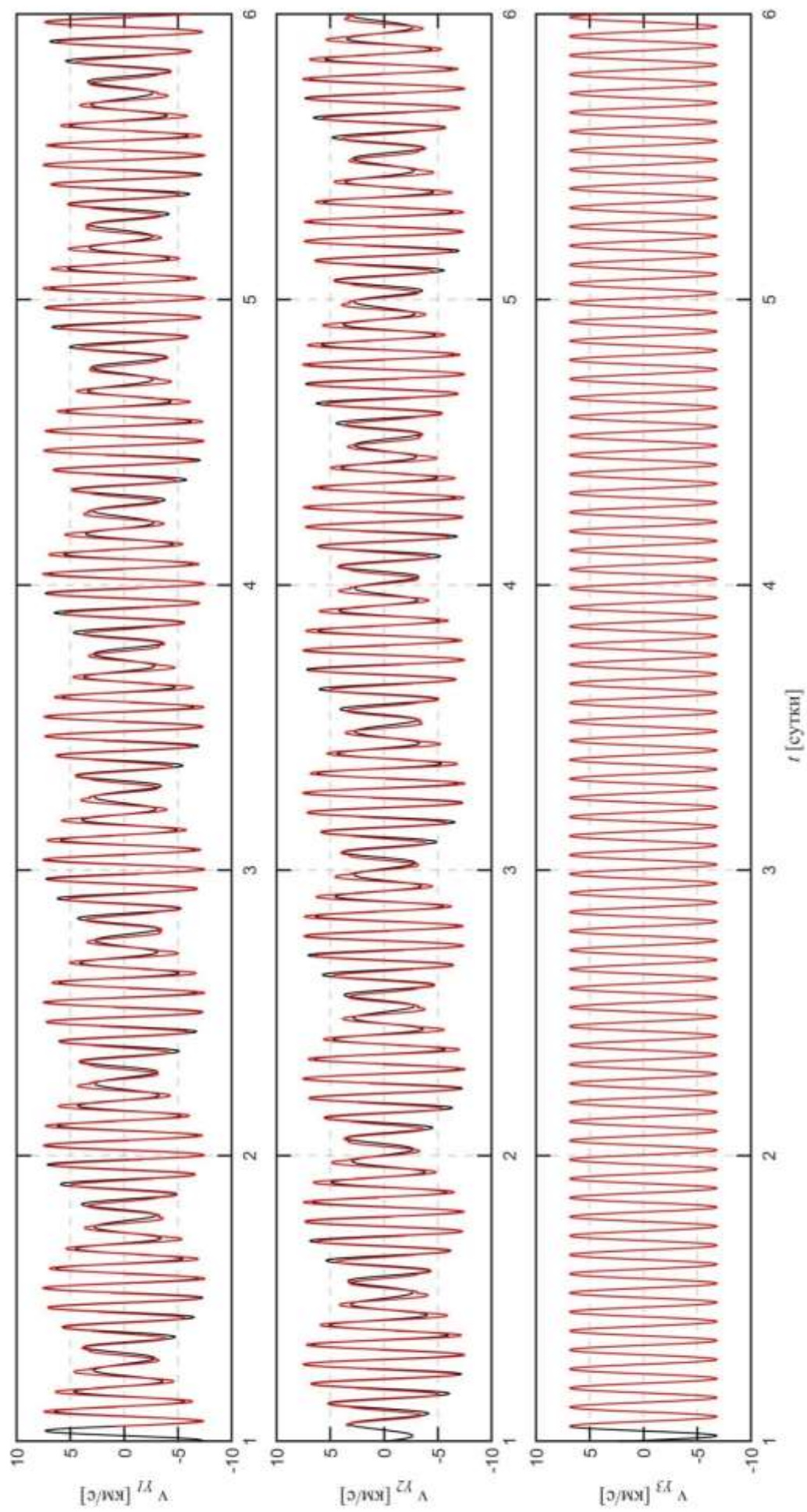


Рис. 4.19. Аппроксимация компонент вектора $\mathbf{v}$ в гринвичской системе координат.

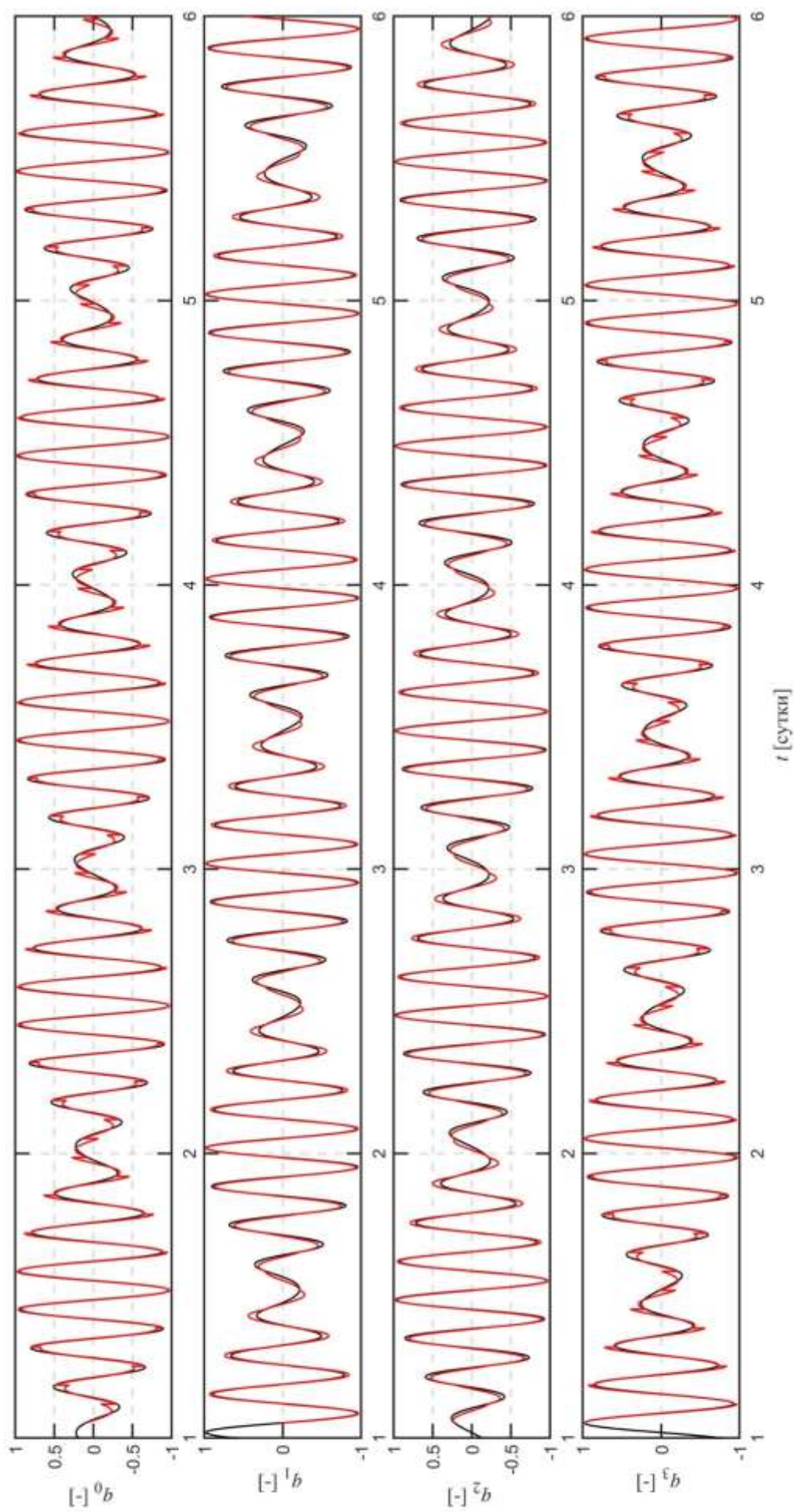


Рис. 4.20. Аппроксимация компонент кватерниона гравитационной ориентации КА с управлением (4.31).

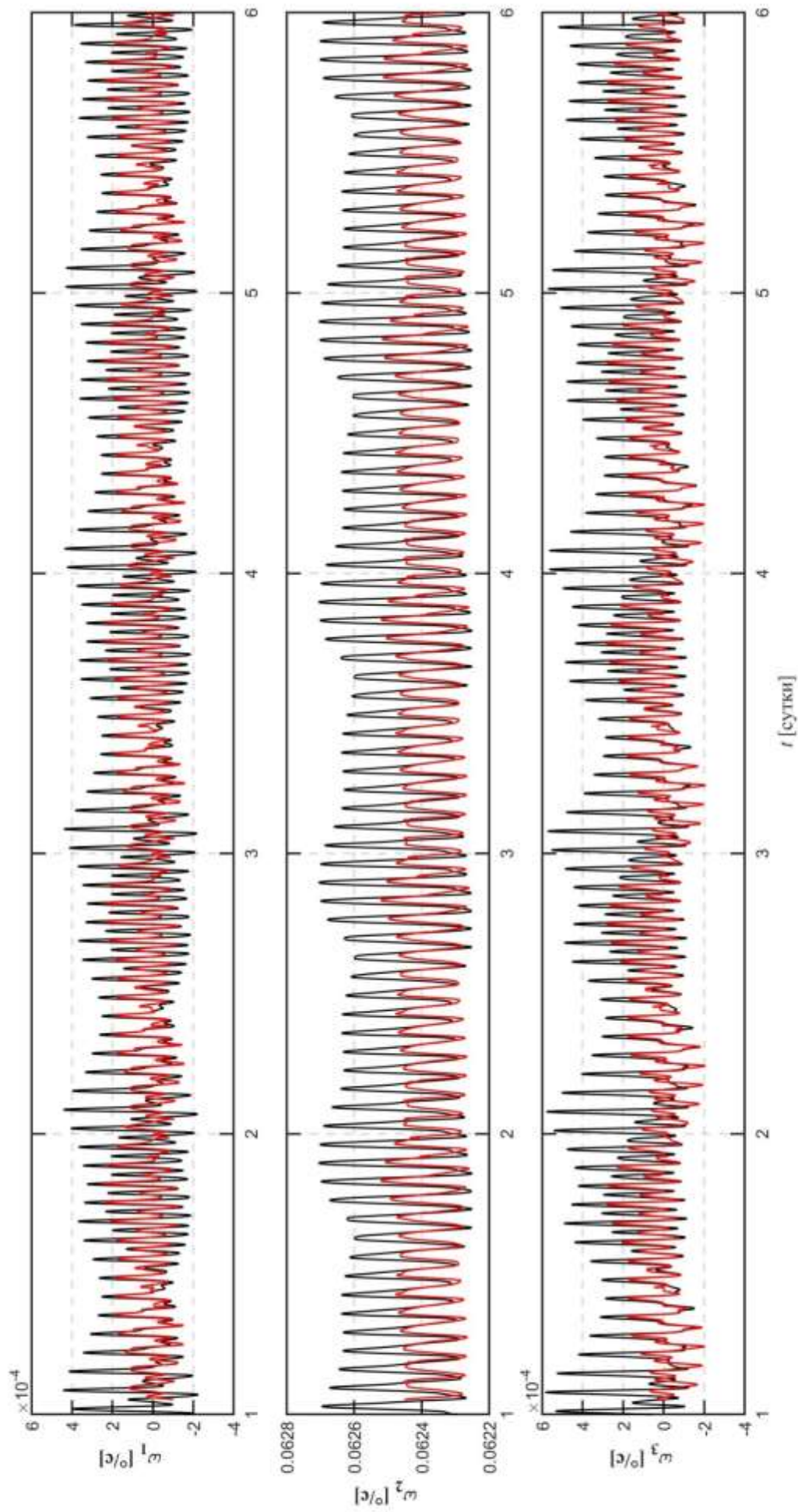


Рис. 4.21. Аппроксимация компонент угловой скорости КА в режиме его гравитационной ориентации с управлением (4.31).

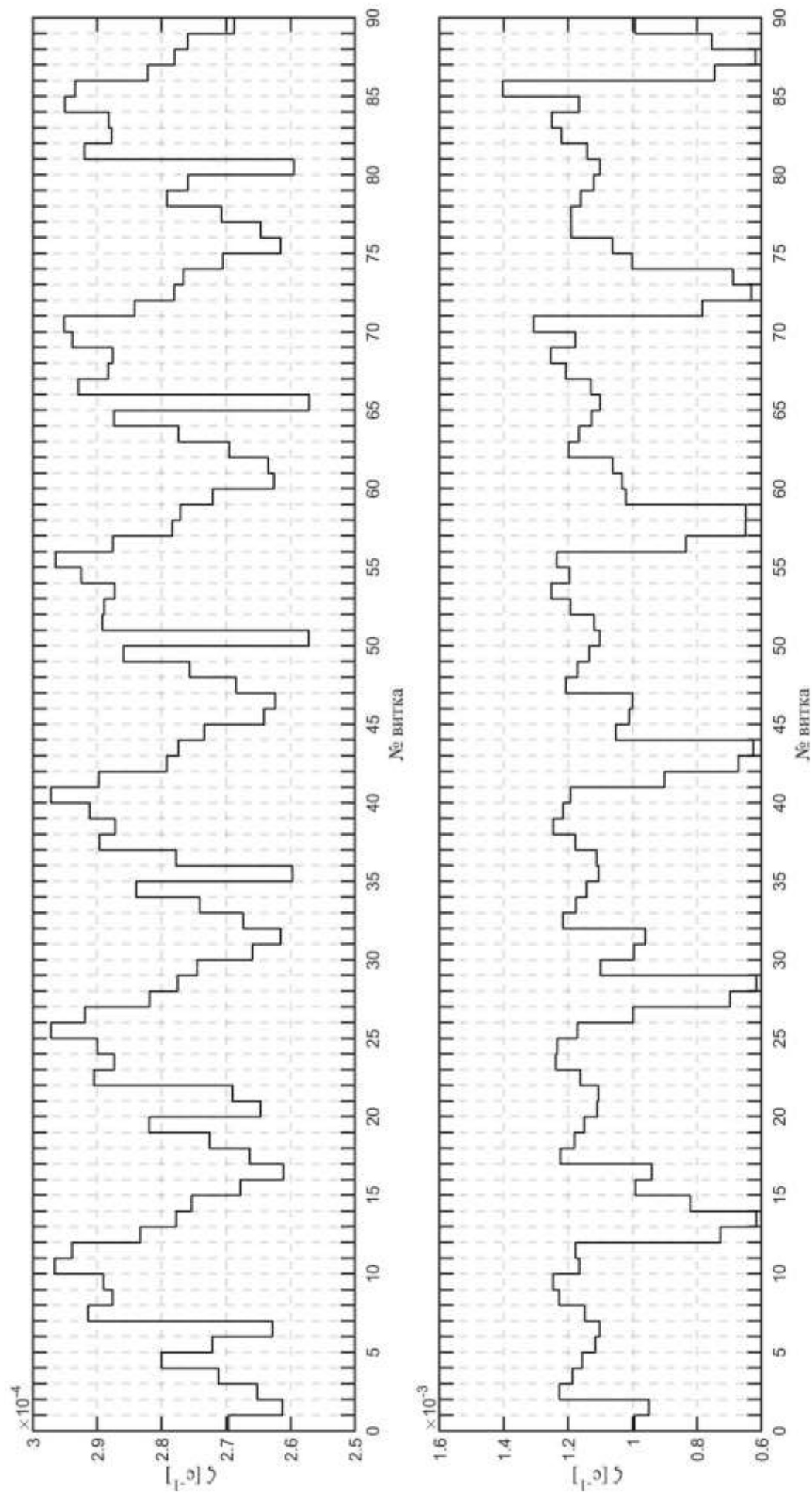


Рис. 4.22. Степени устойчивости решений краевой задачи, использованных для аппроксимации углового движения КА при управлении (4.30) (верхний график), при управлении (4.31) (нижний график).

Глава 5. Режим солнечной ориентации космического аппарата

Режим солнечной ориентации часто используется в процессе эксплуатации КА, поскольку обеспечивает максимальный приток электроэнергии на борт, что особенно важно при проведении экспериментов в космосе с использованием оборудования с большим потреблением электроэнергии (например, электропечей). В данной главе исследуется поддержание режима солнечной ориентации КА на низкой околоземной орбите с помощью гиросистемы или с помощью электромагнитных исполнительных органов в течение длительного времени. Дополнительным функциональным ограничением, накладываемым на управление КА, является наличие неповоротных панелей солнечных батарей (СБ).

5.1 Управление угловым движением космического аппарата с помощью гиросистемы

В данной работе наличие жестко закрепленных панелей СБ предполагает ориентацию в абсолютном пространстве корпуса КА как твердого тела таким образом, чтобы нормаль к панелям СБ всегда была направлена на Солнце. В такой ситуации в общем случае довольно быстро происходит накопление собственного кинетического гиросистемы и возникает необходимость проведения ее разгрузки за счет внешних моментов. В случае проведения на борту КА научных экспериментов в области микрогравитации использование ракетных двигателей для разгрузки гиросистемы неприемлемо. Одним из выходов из сложившейся ситуации может стать использование закона управления гиросистемой, позволяющего не только стабилизировать солнечную ориентацию КА, но и ограничить рост его гиросtatического момента.

5.1.1 Уравнения углового движения космического аппарата

Космический аппарат считаем гиростатом, центр масс которого движется

по геоцентрической орбите. Уравнения движения КА состоят из двух подсистем (см. п. 1.3). Подсистема уравнений углового движения образована уравнениями, описывающими теорему об изменении кинетического момента КА в движении относительно центра масс (1.6) и уравнениями Пуассона (1.8). Теорему об изменении кинетического момента КА представим в виде

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_a, \quad \mathbf{K} = \hat{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}. \quad (5.1)$$

В ней учитываются гравитационный $\mathbf{M}_g$ (1.5) и аэродинамический $\mathbf{M}_a$ (1.6) моменты.

Чтобы замкнуть подсистему уравнений (1.8), (5.1) надо добавить уравнение, описывающее изменение гиросtatического момента КА в виде

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = -\mathbf{M}_c, \quad (5.2)$$

где $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$ – гиросtatический момент КА, $\mathbf{M}_c$ – управляющий момент, приложенный к корпусу КА со стороны гиросистемы. Выражение для $\mathbf{M}_c$ будет приведено ниже.

5.1.2 Трехосная солнечная ориентация космического аппарата

Сперва рассмотрим режим трехосной солнечной ориентации КА, в котором нормаль к плоскости солнечных батарей (ось Ox_2) неизменно направлена на Солнце, продольная ось Ox_1 лежит в плоскости орбиты, абсолютная угловая скорость КА мала.

Реализуем построение закона управления гиросистемой в упрощенной ситуации, когда внешние моменты на КА не действуют, орбита КА и направление на Солнце неизменны в абсолютном пространстве. Тогда уравнение (5.1) принимает вид

$$\hat{I} \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \hat{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_c. \quad (5.3)$$

Пусть $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)^T$ – орт направления «Земля – Солнце». В этом случае орт

$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T = (\mathbf{s} \times \mathbf{E}_2) / |\mathbf{s} \times \mathbf{E}_2|$ лежит в плоскости орбиты КА и ортогонален орту $\mathbf{s}$. Изменение ортов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{n}$ в системе $Ox_1x_2x_3$ описывается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} = 0, \quad \frac{d\mathbf{n}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0. \quad (5.4)$$

Зададим функцию $\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_c(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}, \mathbf{n})$ так, чтобы система (5.3), (5.4) имела асимптотически устойчивое стационарное решение

$$\boldsymbol{\omega} = 0, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{s}. \quad (5.5)$$

Возьмем

$$\mathbf{M}_c = l(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{s} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}) - \hat{S}\boldsymbol{\omega}, \quad (5.6)$$

где l – положительный коэффициент, $\hat{S}$ – постоянный в системе $Ox_1x_2x_3$ симметричный положительно определенный тензор второго порядка. Выражение (5.6) – это сумма потенциального восстанавливающего и диссипативного моментов, возникающих при отклонении фазового вектора системы (5.3), (5.4) от стационарного решения (5.5).

Система (5.3), (5.4), (5.6) допускает стационарное решение (5.5). Вдоль произвольного решения этой системы

$$\dot{E} = -\boldsymbol{\omega} \hat{S} \boldsymbol{\omega}, \quad E = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \hat{S} \boldsymbol{\omega} - l(\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1).$$

Здесь E – полная энергия системы, точка над буквой означает дифференцирование по времени t . Взяв E в качестве функции Ляпунова, можно с помощью теоремы Барбашина – Красовского [145] установить асимптотическую устойчивость решения (5.5).

Для упрощения выбора параметров управления (5.6) запишем

$$\mathbf{M}_c = \xi^2 \hat{I}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{s} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}) - 2\xi \hat{I} \hat{P} \boldsymbol{\omega}, \quad (5.7)$$

где $\hat{P} = \text{diag}(1, 1, \sqrt{2})$, ξ – положительный параметр.

Линеаризуем систему (5.3), (5.4), (5.7) в окрестности стационарного решения (5.5). Пусть $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^T$ – вектор бесконечно малого поворота из положения $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$. В окрестности решения (5.5) выполнены соотношения

$\boldsymbol{\omega} \approx \dot{\boldsymbol{\delta}}$, $\mathbf{s} \approx \mathbf{e}_2 - \boldsymbol{\delta} \times \mathbf{e}_2$, $\mathbf{n} \approx \mathbf{e}_1 - \boldsymbol{\delta} \times \mathbf{e}_1$, и систему (5.3), (5.7) можно привести к виду

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\delta}}{dt^2} + 2\xi \tilde{P} \frac{d \boldsymbol{\delta}}{dt} + (\xi \hat{P})^2 \boldsymbol{\delta} = 0.$$

Выписанная система асимптотически устойчива, ее произвольное решение допускает оценку $\|\boldsymbol{\delta}(t)\| \leq \kappa \|\boldsymbol{\delta}(0)\| \exp(-\xi t)$, где κ – положительная постоянная, не зависящая от $\boldsymbol{\delta}(0)$. Согласно теореме Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях [146], можно ожидать, что режим солнечной ориентации при достаточно большом значении ξ будет устойчив и с учетом действия на КА внешних возмущающих моментов. Параметр ξ возьмем настолько большим, чтобы характерное время действия на КА управляющего момента, равное $1/\xi$, было существенно меньше аналогичного времени для гравитационного и аэродинамического моментов, которыми пренебрегаем. При подходящем выборе параметра ξ и реальной орбите возмущенное движение КА в окрестности положения покоя (5.5) будет затухать с требуемой скоростью. Ниже принято, что $\xi = 0.01 \text{ с}^{-1}$. Полагаем, что закон управления (5.7) формируется в соответствии с показаниями установленных на КА датчиков ориентации и угловой скорости. В тени Земли соотношения (5.7) не нарушались.

Покажем возможности гиросистемы КА при реализации выбранного закона изменения управляющего момента (5.7). С этой целью вычислим решение системы (1.8), (5.1), (5.2), (5.7). Компоненты орта $\mathbf{s}$ в гринвичской системе координат рассчитывались по приближенным формулам [168]. Начальные условия системы (1.8), (5.1), (5.2), (5.7) в момент времени $t=0$ задавались следующим образом. КА в гринвичской системе координат занимает положение (5.5), т.е. $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$. Гиросtatический момент КА $\mathbf{H}(0) = 0$. Начальные значения компонент угловой скорости ω_i , $i = \overline{1,3}$, задавались с учетом ошибок в их реализации:

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0.01^\circ/\text{с}.$$

Геометрические и массово-инерционные параметры КА указаны в п. 1.3, при численном интегрировании уравнений движения центра масс КА в данной главе в качестве начальных условий использовались параметры **Орбиты I (a)** и **Орбиты I (b)**. В случае **Орбиты I (a)** максимальное значение угла ϑ между ортом направления «Земля – Солнце» и плоскостью орбиты КА составляет $\sim 47^\circ$. В случае **Орбиты I (b)** максимальное значение угла ϑ составляет $\sim 88^\circ$. Таким образом **Орбиты I (a)** и **I (b)** существенно по-разному расположены относительно Солнца.

Результаты расчетов движения КА, полученные в рамках принятой модели для **Орбиты I (a)** приведены на рис. 5.1 – 5.3, для **Орбиты I (b)** – на рис. 5.4 – 5.6. Эти результаты представлены графиками зависимости от времени углов ψ , θ , φ и угла $\sigma = \arccos(\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_2)$. На рисунках представлены также графики компонент угловой скорости ω_i , гиросtatического момента H_i , $i = \overline{1,3}$, и модуля вектора гиросtatического момента $|\mathbf{H}|$. Все графики на рис. 5.1 – 5.6 построены на интервалах времени 14 суток. В левой части рис. 5.1, 5.2 и 5.4, 5.5 в укрупненном масштабе изображен начальный участок каждого графика, иллюстрирующий переходной процесс. В данном примере этот процесс обусловлен ошибками в задании начальной угловой скорости. Результаты моделирования показывают, что для обоих рассматриваемых вариантов орбит использование закона управления (5.7) обеспечивает трехосную солнечную ориентацию КА и затухание его возмущенного движения в окрестности положения покоя (5.5). Экстремумы на графиках угла θ , представленных на рис. 5.1 и 5.4, соответствуют максимальному значению угла ϑ , т.к. фактически разница между углами θ и ϑ определяется величиной угла σ ($\theta = \vartheta$ при $\sigma = 0$), который в данном случае не превышает значения 0.4° . При этом величина модуля вектора гиросtatического момента $|\mathbf{H}|$ неограниченно возрастает на всем интервале времени. Чтобы ограничить рост гиросtatического момента КА не нарушая режим его солнечной ориентации далее предложен соответствующий закон управления.

5.1.3 Режим солнечной ориентации космического аппарата с ограничением роста гиростатического момента

Рассмотрим возможность использования закона управления, позволяющего не только обеспечить затухание возмущенного движения КА в окрестности положения покоя с требуемой скоростью, но и дополнительно ограничить рост накапливаемого гиростатического момента КА. Чтобы не нарушать режим солнечной ориентации, накопление гиростатического момента будем контролировать только за счет управления углом поворота КА вокруг орта $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$.

Рассмотрим функцию $F = (\mathbf{K} \hat{S} \mathbf{K}) / 2$. Примем, что из всех внешних моментов на КА действует только гравитационный, т.е. $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}_g$. Тогда

$$\dot{F} = \dot{\mathbf{K}} \hat{S} \mathbf{K} = \mathbf{M}_g \hat{S} \mathbf{K} = \frac{3\mu_E}{r^3} (\boldsymbol{\eta} \times \hat{I} \boldsymbol{\eta}) \hat{S} \mathbf{K},$$

где $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{r}/r = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$ – орт вектора $\mathbf{r}$. Выберем такое движение КА вокруг орта $\mathbf{e}_2$, которое в каждый момент времени минимизирует величину $f = \dot{F}$. Это замедлит рост F и даже может вызвать уменьшение $|\mathbf{K}|$. Введем угол $\varphi_c = \arccos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)$ поворота КА вокруг орта $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$, направление отсчета угла φ_c согласовано с ортом $\mathbf{e}_2$. Приближенное отслеживание минимума функции $f = f(\varphi_c)$ в процессе полета можно реализовать как движение КА в соответствии с уравнением

$$\ddot{\varphi}_c + \chi \dot{\varphi}_c + \frac{df}{d\varphi_c} = 0, \quad \chi = \text{const} > 0. \quad (5.8)$$

Изменение угла φ_c будем считать быстрым – с характерным временем намного меньше орбитального периода. В этом движении можно приближенно принять $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}_c \mathbf{e}_2$ и орт $\boldsymbol{\eta}$ считать неизменным в абсолютном пространстве. Тогда изменение вектора $\mathbf{K}$ и орта $\boldsymbol{\eta}$ относительно системы $Ox_1x_2x_3$ будет описываться уравнениями

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}}{dt} + \dot{\varphi}_c (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{K}) = 0, \quad \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\eta}}{dt} + \dot{\varphi}_c (\mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\eta}) = 0.$$

Найдем $df / d\varphi_c$. Заметим, что $\dot{f} = \dot{\varphi}_c (df / d\varphi_c)$. С другой стороны, $\dot{f}$ можно представить в виде

$$\dot{f} = \frac{3\mu_E}{r^3} \frac{\tilde{d}}{dt} [(\boldsymbol{\eta} \times \hat{I}\boldsymbol{\eta}) \hat{S} \mathbf{K}] + [(\boldsymbol{\eta} \times \hat{I}\boldsymbol{\eta}) \hat{S} \mathbf{K}] \frac{\tilde{d}}{dt} \left(\frac{3\mu_E}{r^3} \right).$$

При рассматриваемых допущениях имеем

$$\dot{f} = \frac{3\mu_E}{r^3} \frac{\tilde{d}}{dt} [(\boldsymbol{\eta} \times \hat{I}\boldsymbol{\eta}) \hat{S} \mathbf{K}].$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{d}}{dt} [(\boldsymbol{\eta} \times \hat{I}\boldsymbol{\eta}) \hat{S} \mathbf{K}] &= \left(\frac{\tilde{d}\boldsymbol{\eta}}{dt} \times \hat{I}\boldsymbol{\eta} \right) \hat{S} \mathbf{K} + \left(\boldsymbol{\eta} \times \hat{I} \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\eta}}{dt} \right) \hat{S} \mathbf{K} + (\boldsymbol{\eta} \times \hat{I}\boldsymbol{\eta}) \hat{S} \frac{\tilde{d}\mathbf{K}}{dt} = \\ &= -\dot{\varphi}_c \left\{ [(\mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\eta}) \times \hat{I}\boldsymbol{\eta}] \hat{S} \mathbf{K} + [\boldsymbol{\eta} \times \hat{I}(\mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\eta})] \hat{S} \mathbf{K} + (\boldsymbol{\eta} \times \hat{I}\boldsymbol{\eta}) \hat{S} (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{K}) \right\}. \end{aligned}$$

Положим, что $\hat{S} = \text{diag}(S_1, S_2, S_3)$, тогда, преобразовав слагаемые, стоящие в фигурных скобках, получим

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\varphi_c} = \frac{\dot{f}}{\dot{\varphi}_c} = \tilde{f} &= -\frac{3\mu_E}{r^3} \left\{ -[S_3(I_2 - I_1) - S_1(I_2 - I_3)]\eta_1\eta_2 K_1 + \right. \\ &\left. + S_2(I_3 - I_1)(\eta_1^2 - \eta_3^2)K_2 + [S_3(I_2 - I_1) - S_1(I_2 - I_3)]\eta_2\eta_3 K_3 \right\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

При $\hat{S} = \kappa \text{diag}(1, 1, 1)$, где $\kappa = \text{const} > 0$, выражение (5.9) представляет собой закон управления, описанный в [113]. Рассмотрим случай, когда

$$\hat{S} = \text{diag}\left(\frac{\kappa_1}{I_2 - I_3}, \frac{\kappa_2}{I_3 - I_1}, \frac{\kappa_3}{I_2 - I_1}\right), \quad \kappa_j = \text{const} > 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Выражение (5.9) теперь примет вид

$$\tilde{f} = -\frac{3\mu_E}{r^3} \left[-(\kappa_3 - \kappa_1)\eta_1\eta_2 K_1 + \kappa_2(\eta_1^2 - \eta_3^2)K_2 + (\kappa_3 - \kappa_1)\eta_2\eta_3 K_3 \right]. \quad (5.10)$$

Такой закон в общем случае оказался более эффективным.

Если орбита КА близка к круговой, то (5.10) можно заменить выражением

$$\tilde{f} = -3\omega_0^2 \left[-(\kappa_3 - \kappa_1)\eta_1\eta_2 K_1 + \kappa_2(\eta_1^2 - \eta_3^2)K_2 + (\kappa_3 - \kappa_1)\eta_2\eta_3 K_3 \right], \quad (5.11)$$

где ω_0 – среднее движение КА (орбитальная частота). Для рассматриваемых в данной главе орбит $\omega_0^2 = 1.19 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-2}$. Значения величин η_i , $i = \overline{1,3}$, в системе управления КА можно получить, используя показания датчика центра Земли.

Движение КА, близкое движению вокруг орта $\mathbf{e}_2$, согласно уравнению (5.8), может быть реализовано, если управляющий момент (5.7) дополнить слагаемым

$$\tilde{\mathbf{M}}_c = -\hat{I}(\chi\omega_2 + \tilde{f})\mathbf{e}_2. \quad (5.12)$$

В этом случае векторное уравнение (5.2), описывающее изменение гиросtatического момента $\mathbf{H}$, принимает вид

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = -(\mathbf{M}_c + \tilde{\mathbf{M}}_c). \quad (5.13)$$

Покажем, что выбранный закон изменения управляющего момента (5.7), (5.12) действительно обеспечивает солнечную ориентацию КА и при этом ограничивает накопление гиросtatического момента. С этой целью вычислим решение системы (1.8), (5.1), (5.7), (5.12), (5.13) при $\chi = 2\xi$, $\xi = 0.01 \text{ с}^{-1}$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 1 \text{ (Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с)}^{-1}$, $\kappa_3 = 3 \text{ (Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с)}^{-1}$ с начальными условиями в момент времени $t = 0$, заданными как в п. 5.1.2. По-прежнему, в тени Земли соотношения (5.7) не нарушались. Результаты расчетов движения КА, полученные в рамках принятой модели для **Орбиты I (а)**, приведены на рис. 5.7 – 5.9, для **Орбиты I (б)** – на рис. 5.10 – 5.12. Результаты моделирования представлены графиками аналогичными представленным на рис. 5.1 – 5.6. Результаты моделирования показывают, что использование закона управления (5.7), (5.12) обеспечивает солнечную ориентацию КА и затухание его возмущенного движения в окрестности положения покоя для обеих рассматриваемых орбит.

При численном моделировании системы (1.8), (5.1), (5.7), (5.12), (5.13) использование выражения (5.10) или (5.11) в законе управления (5.12) не дает видимой разницы в полученных решениях, что обусловлено формой орбиты КА, близкой к круговой. Величина накапливаемого гиросtatического момента

КА для **Орбиты I (а)** остается ограниченной значением $|\mathbf{H}| < 12 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ (см. рис. 5.9). В случае движения КА по **Орбите I (б)**, когда Солнце относительно плоскости орбиты поднимается достаточно высоко ($\vartheta > 75^\circ$), значение $|\mathbf{H}|$ начинает возрастать (см. рис. 5.12), достигая своего максимума $|\mathbf{H}| = 31 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ при $\vartheta \approx 88^\circ$. В дальнейшем, по мере уменьшения ϑ , происходит разгрузка гиросистемы до значения $|\mathbf{H}| < 12 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$.

Поскольку использование закона (5.12) для разгрузки гиросистемического момента подразумевает повороты КА относительно орта $\mathbf{e}_2$ необходимо оценить как такие повороты повлияют на уровень микроускорений на борту. Результаты расчетов микроускорений для **Орбиты I (б)** показаны на рис. 5.13 (слева) и рис. 5.14, 5.15. На 5.13 (слева) показаны графики зависимости от времени компонент составляющей микроускорения b_{ri} , $i = \overline{1,3}$, и ее модуля $|\mathbf{b}_r|$, т.к. именно составляющая $\mathbf{b}_r$ определяется собственным вращением КА как твердого тела (см. п. 1.5). Слева на рис. 5.13. красным цветом показаны микроускорения в случае использования закона управления (5.7), черным – в случае использования закона (5.7), (5.12). На рис. 5.14 приведены графики зависимости от времени компонент полного микроускорения b_i , $i = \overline{1,3}$, и его модуля $|\mathbf{b}|$ при использовании закона управления (5.7). На рис. 5.15 показаны аналогичные графики для случая использования закона (5.7), (5.12). Все составляющие микроускорений рассчитаны по формулам представленным в п. 1.5 в точке P , координаты которой приведены там же.

Справа на рис. 5.13 красным цветом показаны амплитудные спектры $A_{ri}(f)$ величин b_{ri} , $i = \overline{1,3}$ в случае использования закона управления (5.7), черным – в случае использования закона (5.7), (5.12). На рис. 5.16 приведены амплитудные спектры $A_{bi}(f)$ компонент b_i , $i = \overline{1,3}$ полных микроускорений: в левой колонке в случае использования закона управления (5.7), в правой – в случае использования закона (5.7), (5.12). Из левой части рис. 5.16 видно, что при использовании закона управления (5.7) доминирующая частота установившихся

колебаний величин b_i , $i = \overline{1,3}$, показанных на рис. 5.14, равна $2f_0$, где $f_0 = \omega_0 / 2\pi$. За такие колебания ответственен градиент гравитационного поля. В случае использования закона (5.7), (5.12) появляется вторая доминирующая частота, вызванная поворотом КА относительно орта $\mathbf{e}_2$ в соответствии с (5.8) и равная $4f_0$, что следует из амплитудных спектров приведенных на рис. 5.16 справа. Все рассмотренные в данной главе амплитудные спектры построены для шага сетки $h = 10$ с (частота Найквиста $F = 0.05$ Гц) с помощью спектрального анализа, выполнявшегося по схеме, представленной в п. 1.6.

Из результатов моделирования представленных на рис. 5.14 и 5.15 видно, что уровень микроускорений на борту КА в рассматриваемой точке P по модулю не превышает значения $4.0 \cdot 10^{-6}$ м/с² как в случае использования закона управления (5.7), так и в случае совместного использования законов (5.7), (5.12). Указанный уровень микроускорений является приемлемым для проведения экспериментов в области микрогравитации.

5.1.4 Использование режима временной орбитальной ориентации космического аппарата

В качестве одного из возможных вариантов избежать нежелательного роста кинетического момента гиросистемы при значении ϑ , близком к максимальному в случае **Орбиты I (b)** (см. рис. 5.12), в данной главе рассматривается возможность смены режима ориентации КА. Т.е. можно при достижении некоторого заранее выбранного порогового значения ϑ переориентировать КА из режима солнечной ориентации в режим орбитальной ориентации без накопления собственного кинетического момента гиросистемы (см. главу 4), до тех пор, пока значение угла ϑ вновь не станет меньше порогового.

В данном случае орбитальной ориентацией КА будем называть его движение, при котором $\mathbf{e}_2 = \pm \mathbf{E}_2$ и $\mathbf{e}_1 = \pm \mathbf{r}$. При указанном положении Солнца

режим орбитальной ориентации обеспечивает приемлемый энергоъем с солнечных батарей. Для рассматриваемой **Орбиты I (b)** требуемая орбитальная ориентация КА задается соотношениями $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{E}_2$, поскольку в системе координат $O_E Z_1 Z_2 Z_3$ Солнце расположено в полупространстве $Z_2 < 0$. Для определенности зададим положение КА соотношениями $\mathbf{e}_1 = -\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\omega} = -\omega_0 \mathbf{e}_2$.

Для реализации режима орбитальной ориентации КА закон управления его гиростатическим моментом примем в виде

$$\mathbf{M}_c = \xi^2 \hat{I}(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{E}_2) - 2\xi \hat{I}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_2) + 4\xi \mathbf{H}, \quad (5.14)$$

где $\mathbf{E}_2 = (\tilde{u}_{21}, \tilde{u}_{22}, \tilde{u}_{23})$. Обоснование выбора закона (5.14), а также результаты исследования подобных ему законов управления приведены в главе 4.

Результаты расчетов движения КА для **Орбиты I (b)** при последовательном использовании законов управления (5.7), (5.12) и (5.14) представлены на рис. 5.17, 5.18. Моделирование движения КА проводилось по следующему сценарию. С момента времени $t=0$ до наступления момента времени выполнения условия $\vartheta > 75^\circ$ и с наступления момента времени выполнения условия $\vartheta < 75^\circ$ до окончания моделирования для управления КА использовался закон управления (5.7), (5.12). На интервале времени моделирования движения КА, на котором выполнялось условие $\vartheta \geq 75^\circ$, для управления использовался закон (5.14). Значения начальных условий системы в момент времени $t=0$ и значения параметров закона управления (5.7), (5.12) задавались, как в п. 5.1.2 и 5.1.3. Параметры закона управления (5.14): $\omega_0 = 1.09 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $\xi = 0.01 \text{ с}^{-1}$. На рис. 5.17 приведены графики компонент гиростатического момента H_i , $i=\overline{1,3}$, и модуля вектора гиростатического момента $|\mathbf{H}|$. Графики в левой части рисунка показаны на интервале времени $0 \leq t \leq 4$ сут, в правой части – на интервале $10 \leq t \leq 14$ сут. На рис. 5.17 видно, что гиростатический момент, накапливаемый в процессе переориентации КА из режима солнечной ориентации в орбитальную и обратно, разгружается за относительно короткий интервал времени. Это обусловлено выбором

коэффициентов соответствующих законов управления (5.7), (5.12) и (5.14). На рис. 5.18 на интервале времени 14 суток показан график освещенности панелей солнечных батарей КА. Освещенность выражена в процентах, 100% достигаются в положении, в котором орты $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{s}$ коллинеарны. График построен с учетом прохождения КА через тень Земли. Функция, характеризующая тень Земли, использовалась в виде

$$\zeta = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + \sqrt{r^2 - R_E^2}, \quad (5.15)$$

где $R_E = 6378$ км – радиус Земли, принятой шаром. В тени Земли ($\zeta \leq 0$) освещенность панелей солнечных батарей КА принималась равной 0%. На рис. 5.17, 5.18 видны переходные процессы, возникающие при последовательной смене законов управления.

Рассмотренный в данной главе дополнительный управляющий момент (5.12) можно использовать не постоянно. К примеру, можно поддерживать солнечную ориентацию КА с помощью закона (5.7), а дополнительный управляющий момент (5.12) применять время от времени для разгрузки накопленного гиросtatического момента КА [112, 113].

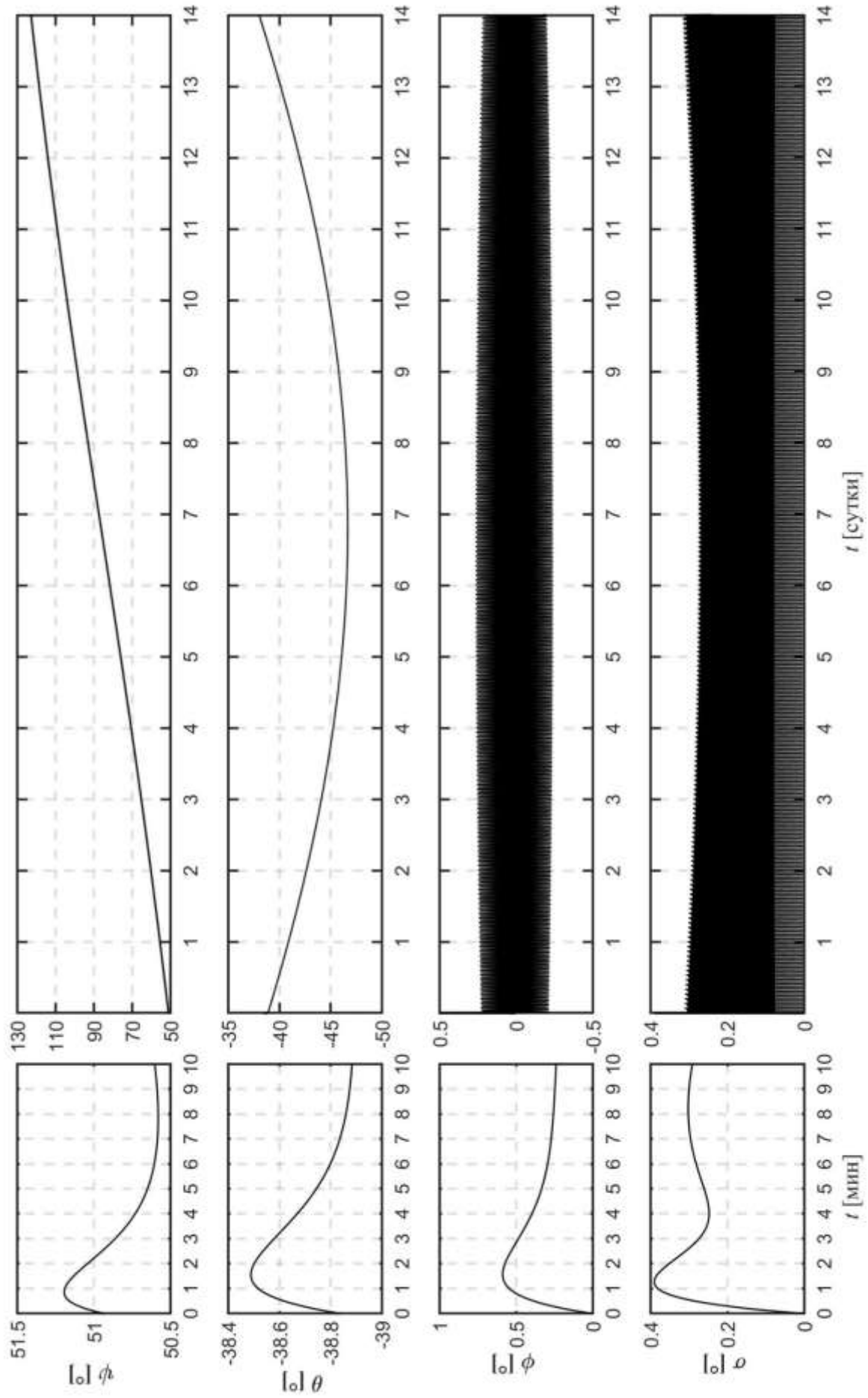


Рис. 5.1.1. Углы ориентации КА в режиме его солнечной ориентации (5.7) (Орбита I (a)).

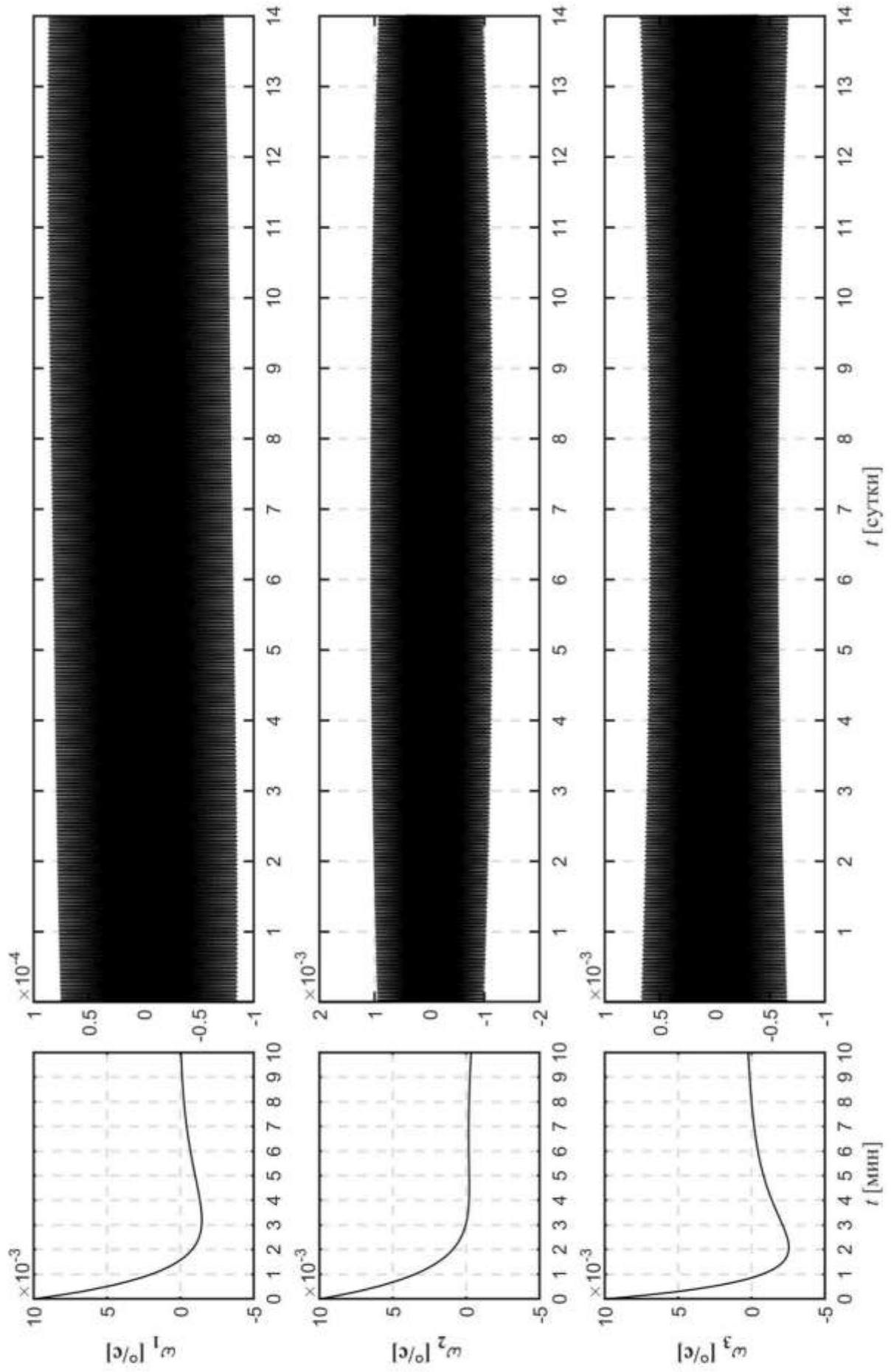


Рис. 5.2. Угловые скорости КА в режиме его солнечной ориентации (5.7) (Орбита I (а)).

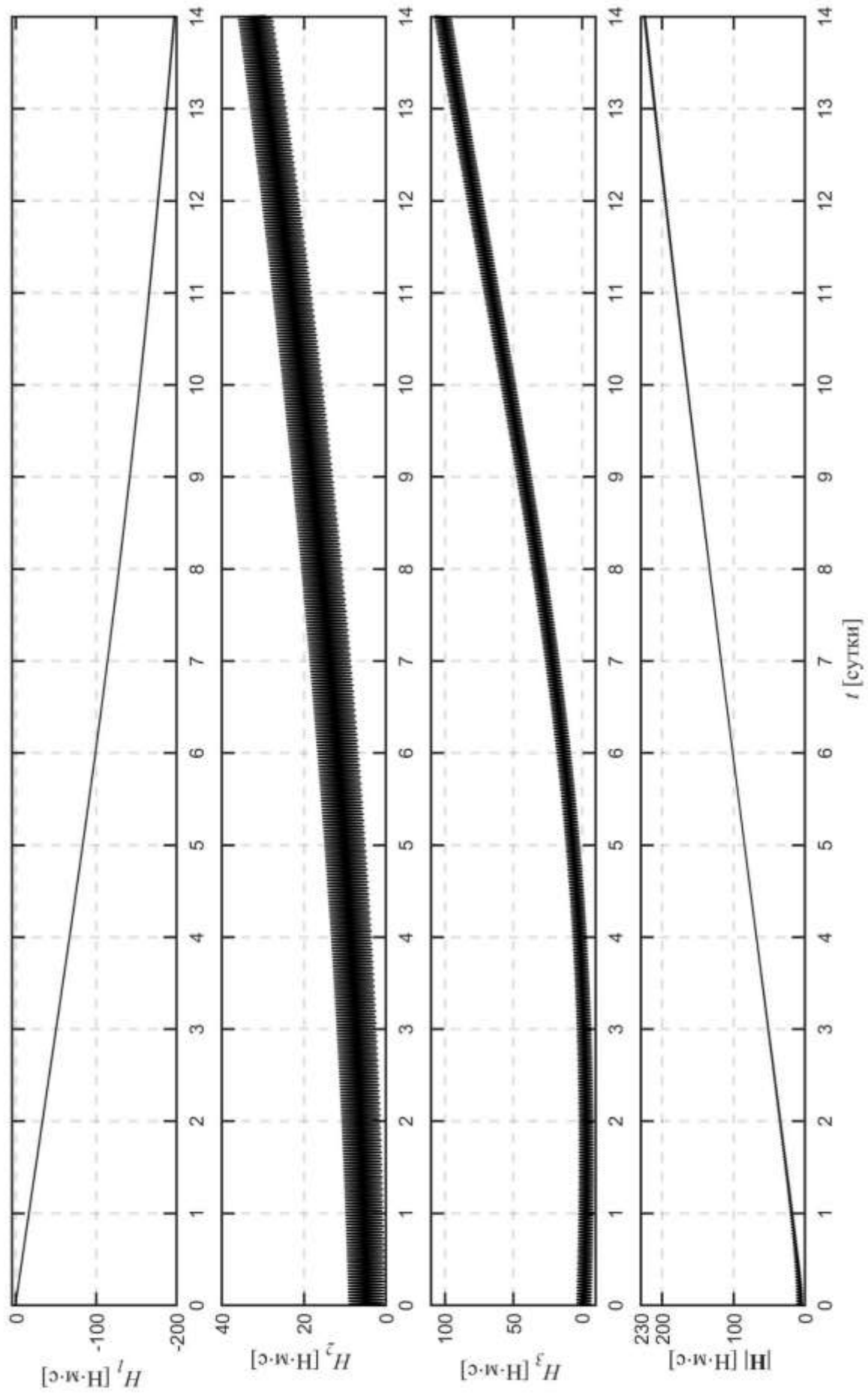


Рис. 5.3. Гиросtatический момент КА в режиме его солнечной ориентации (5.7) (Орбита I (a)).

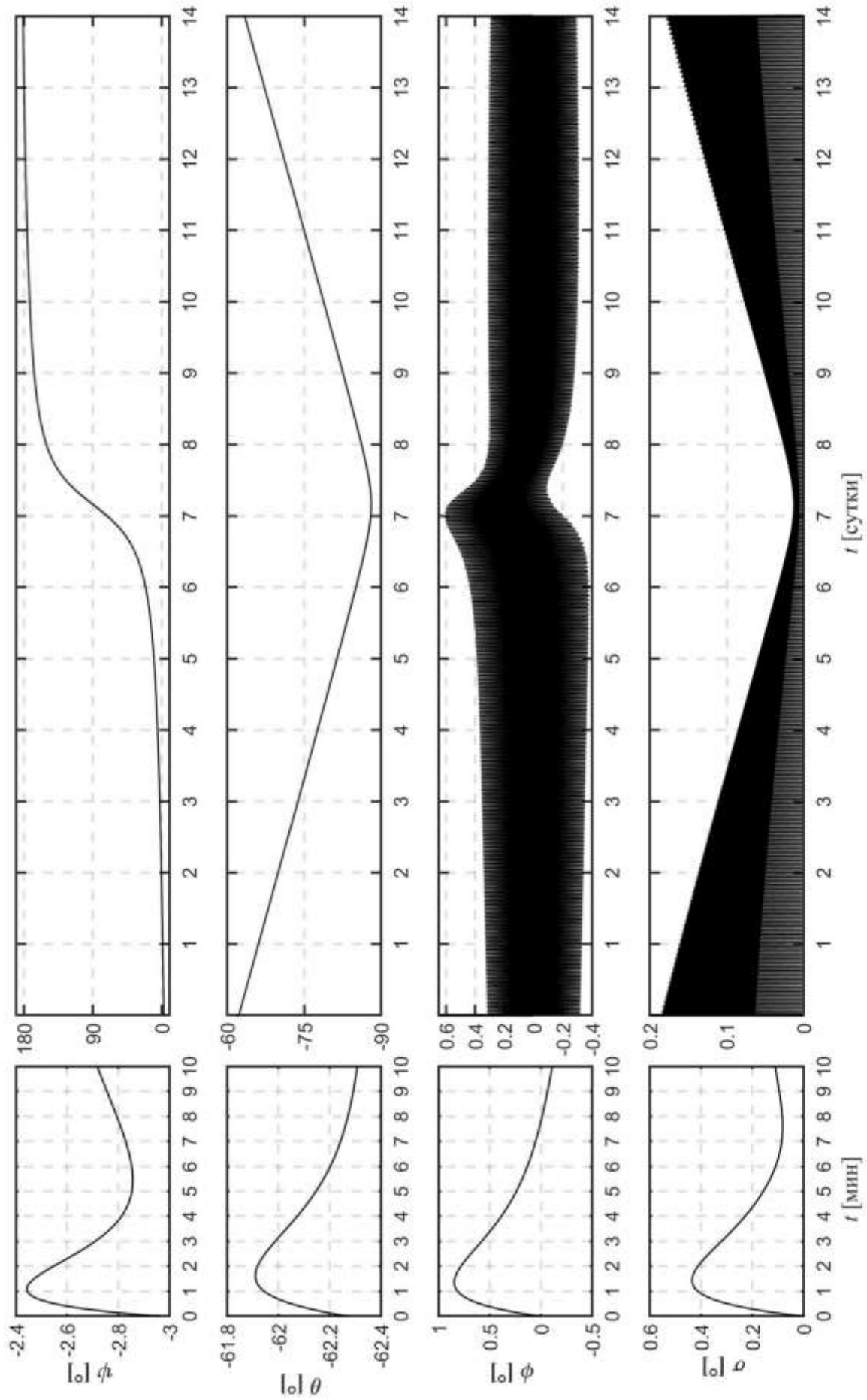


Рис. 5.4. Углы ориентации КА в режиме его солнечной ориентации (5.7) (Орбита I (b)).

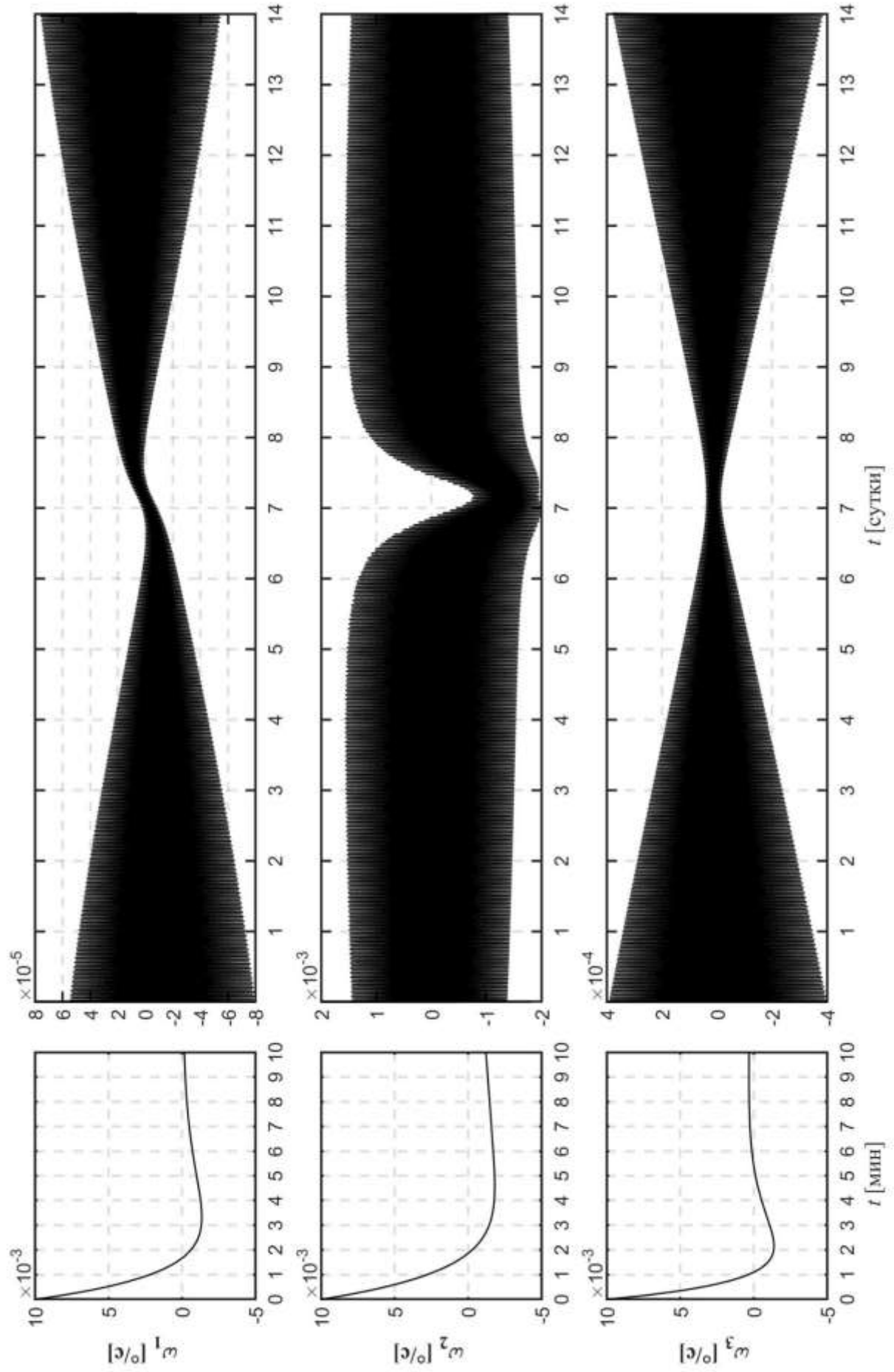


Рис. 5.5. Угловые скорости КА в режиме его солнечной ориентации (5.7) (Орбита I (b)).

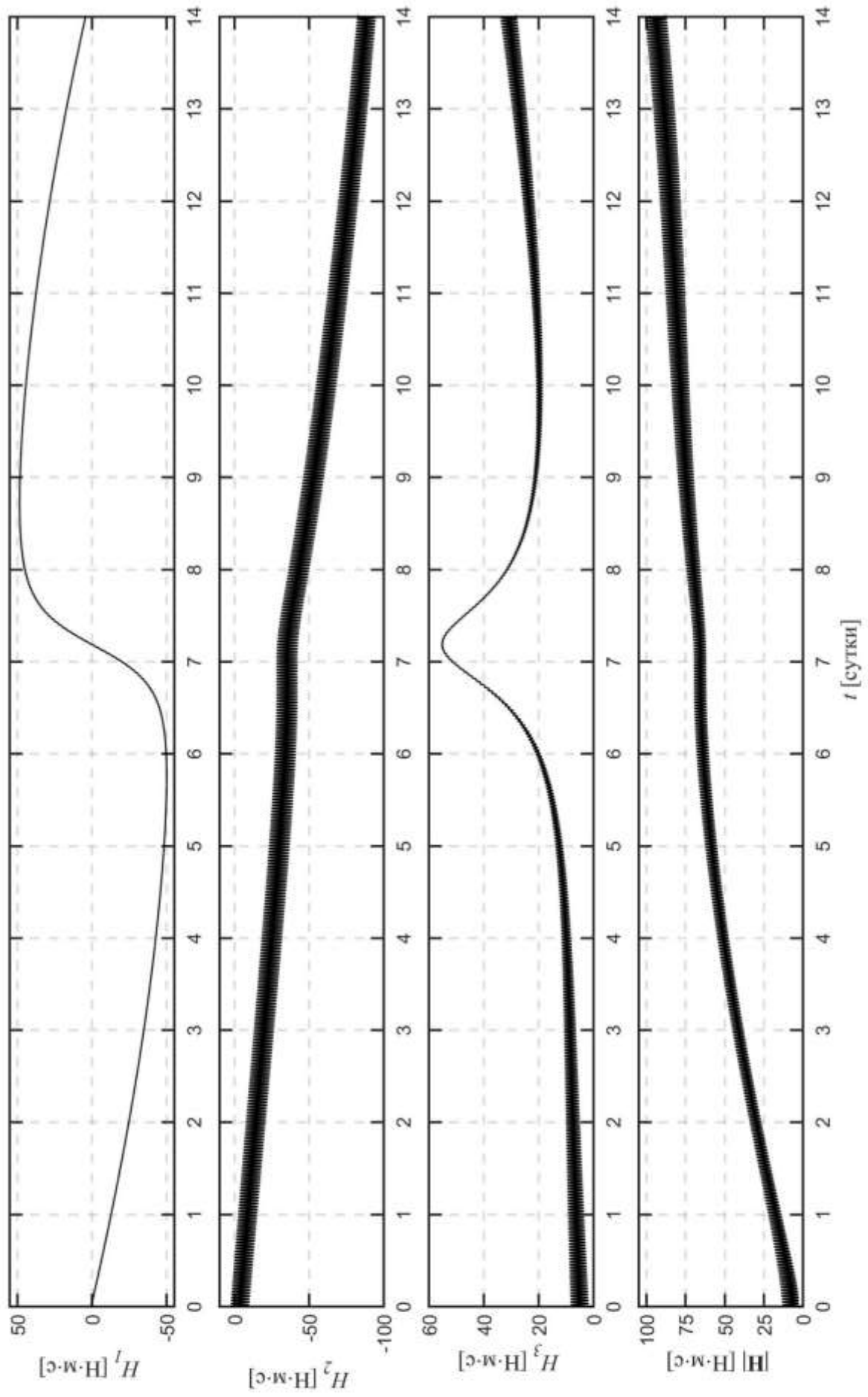


Рис. 5.6. Гиростатический момент КА в режиме его солнечной ориентации (5.7) (Орбита I (b)).

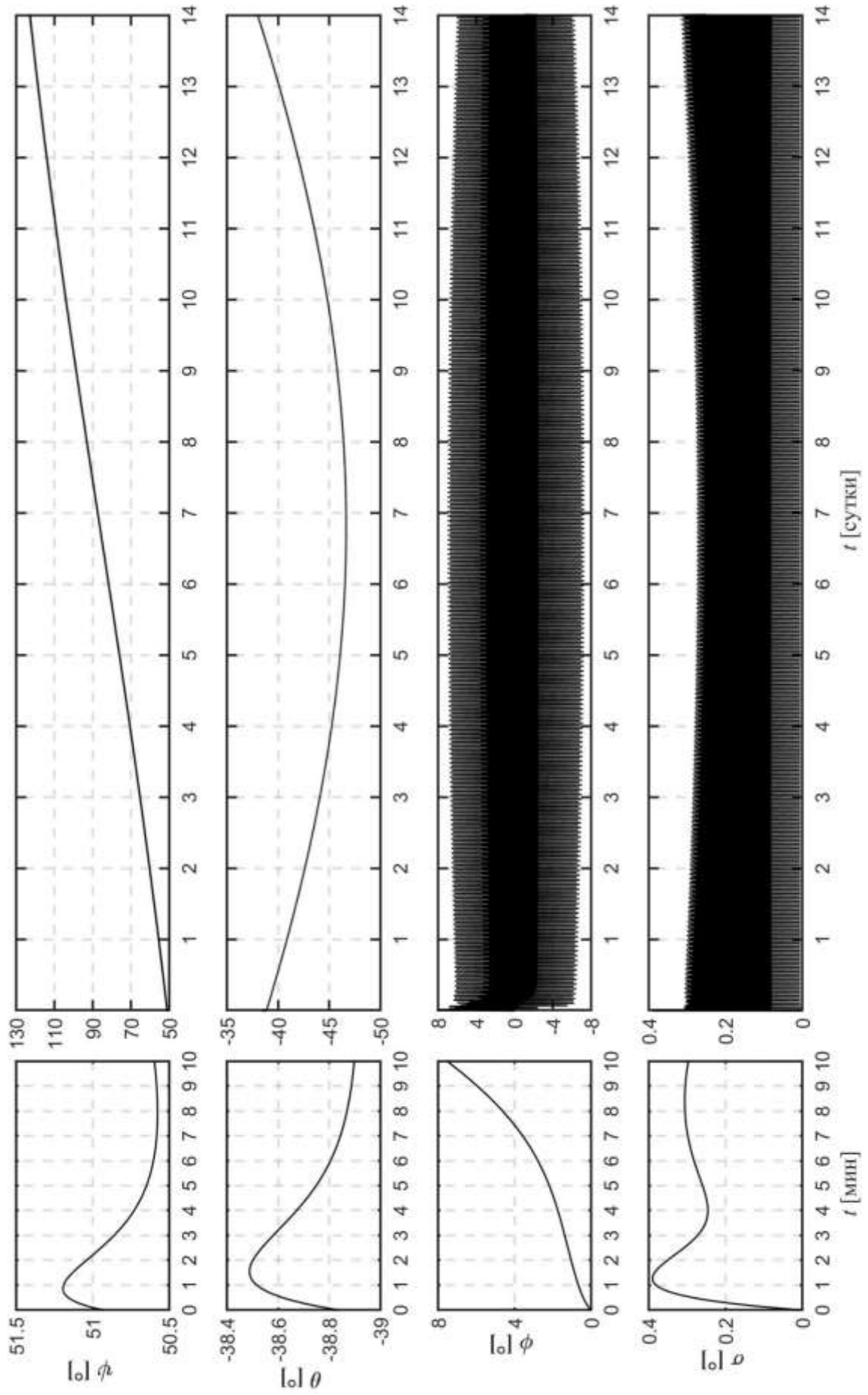


Рис. 5.7. Углы ориентации КА в режиме его солнечной ориентации (5.7), (5.12) (Орбита I (а)).

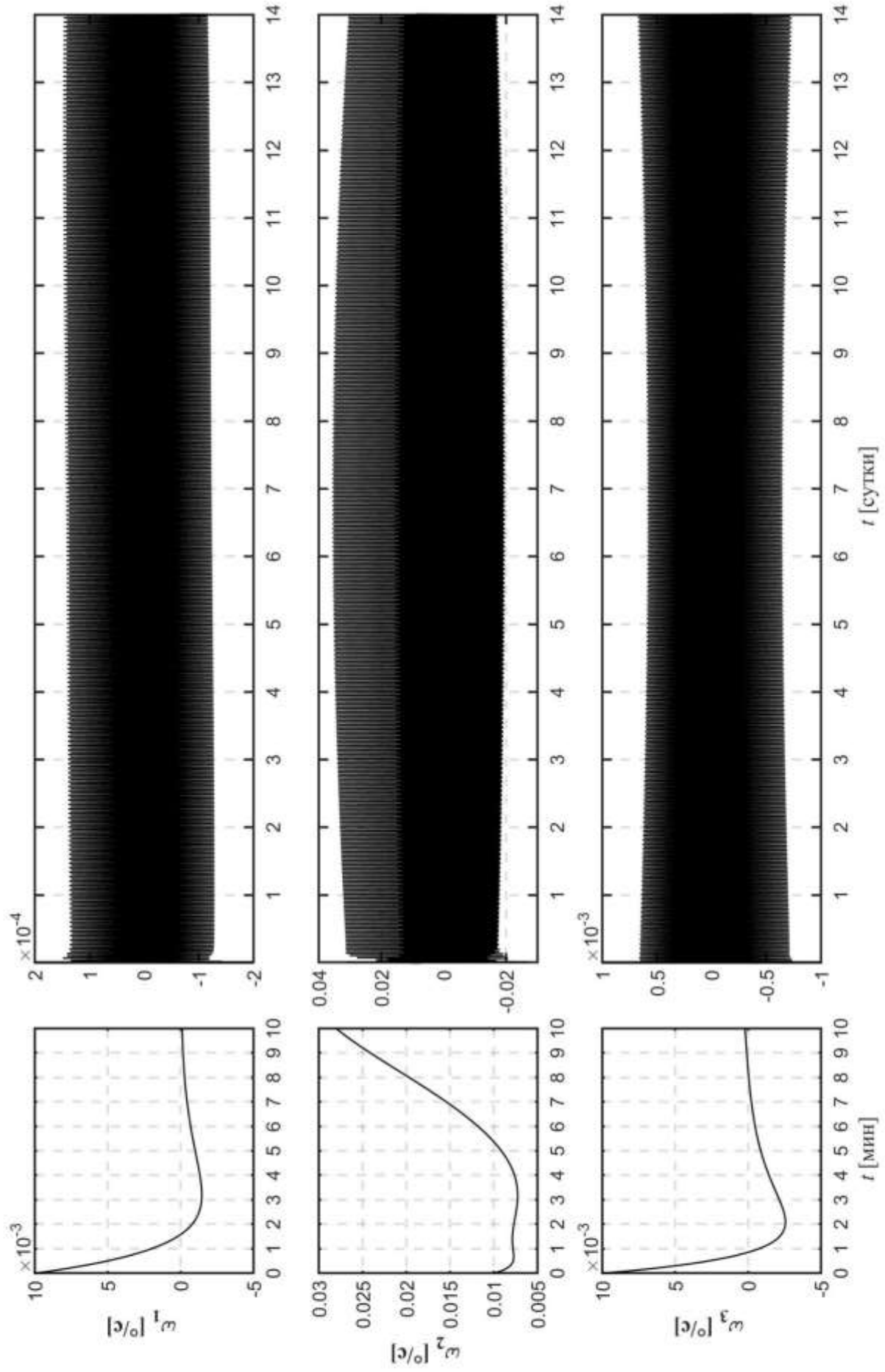


Рис. 5.8. Угловые скорости КА в режиме его солнечной ориентации (5.7), (5.12) (Орбита I (а)).

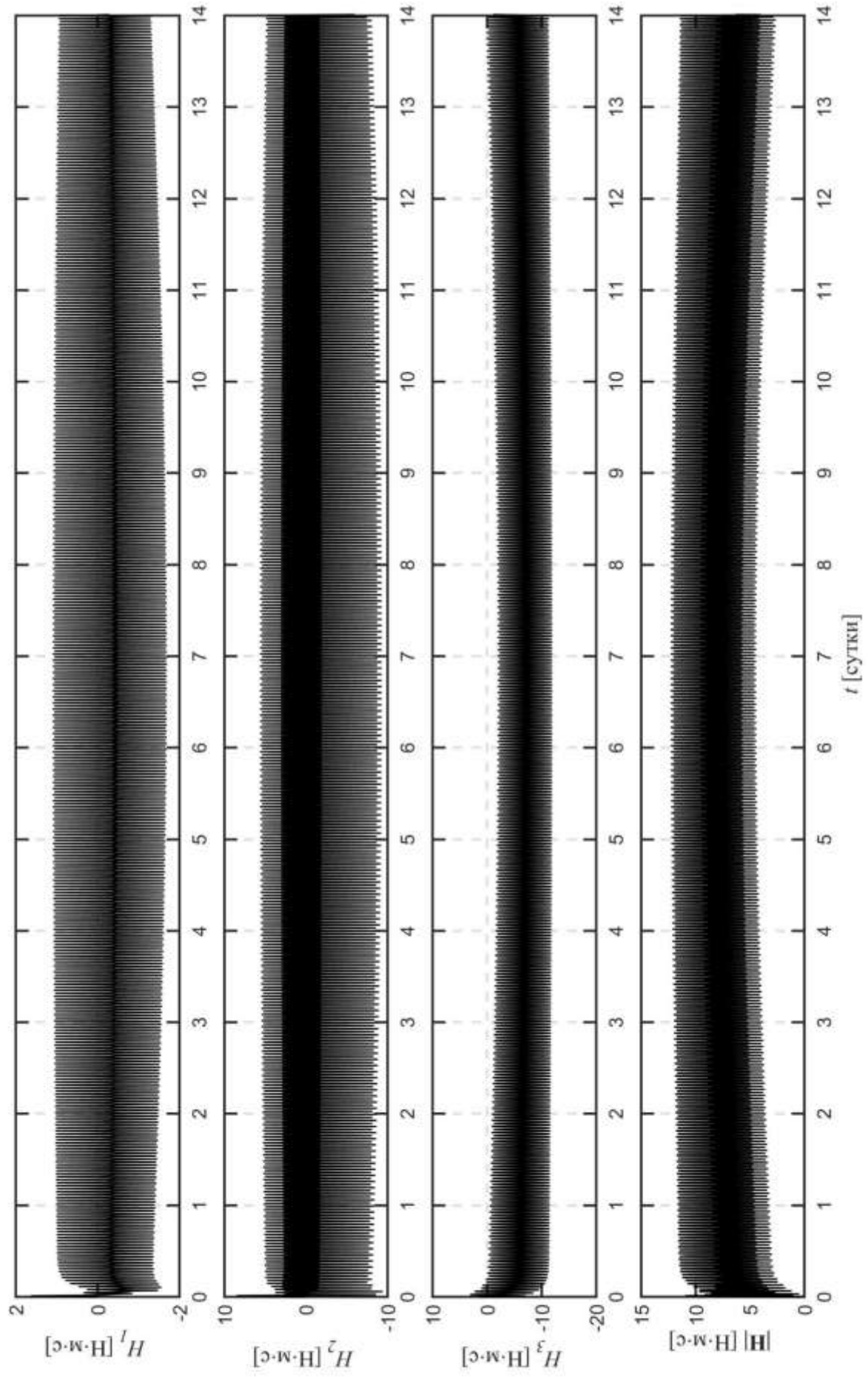


Рис. 5.9. Гиросtatический момент КА в режиме его солнечной ориентации (5.7), (5.12) (Орбита I (a)).

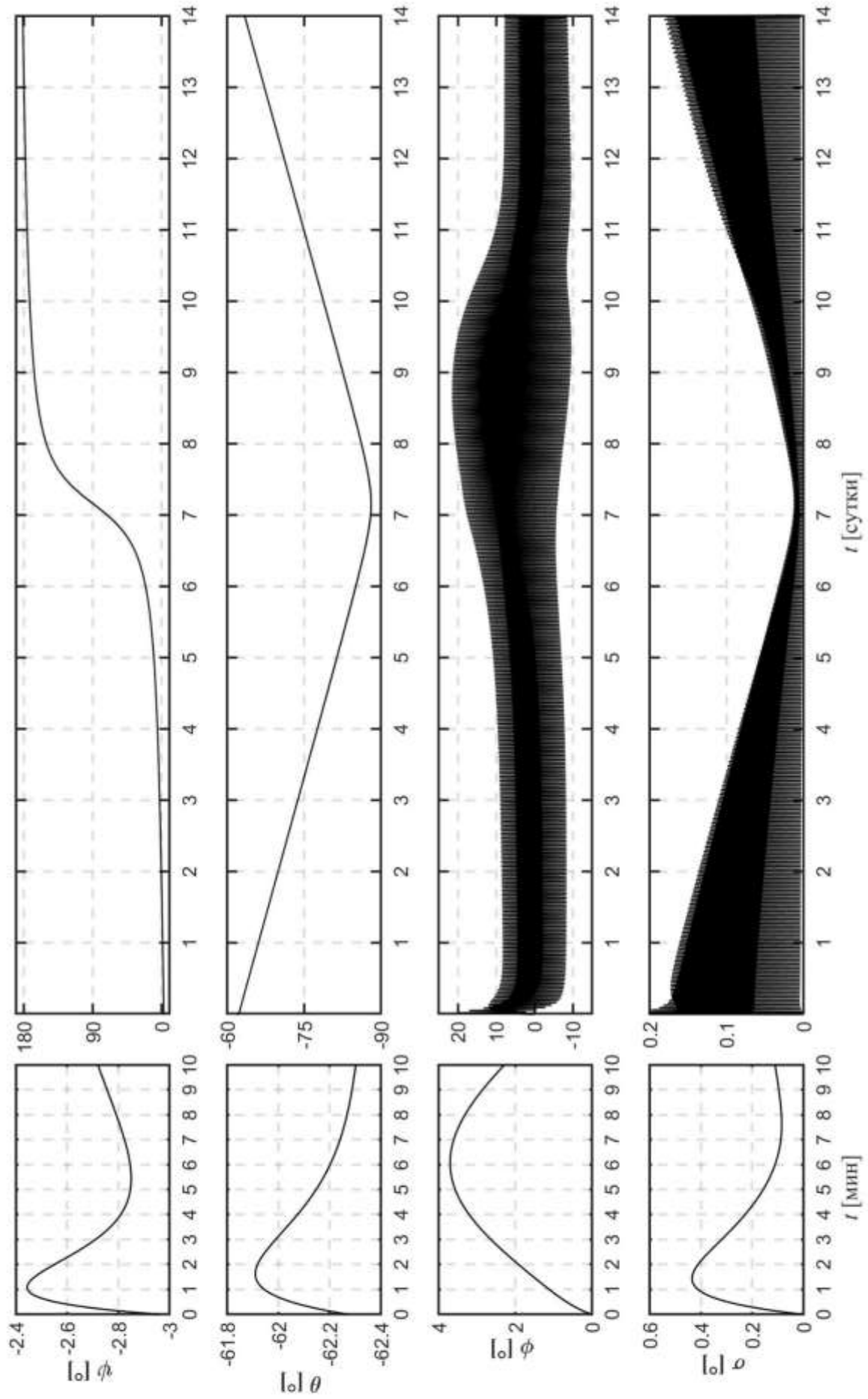


Рис. 5.10. Углы ориентации КА в режиме его солнечной ориентации (5.7), (5.12) (Орбита I (b)).

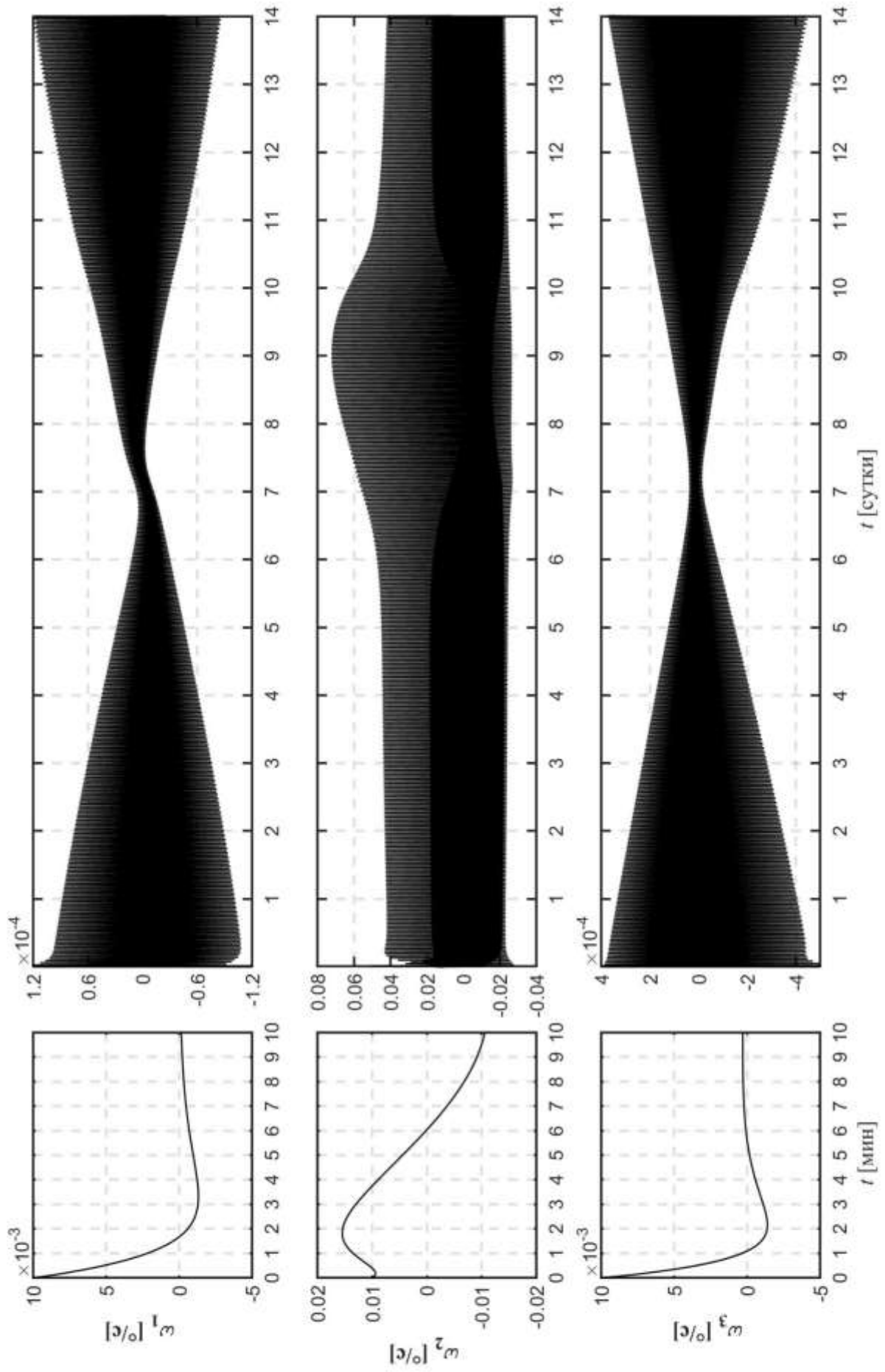


Рис. 5.11. Угловые скорости КА в режиме его солнечной ориентации (5.7), (5.12) (Орбита I (b)).

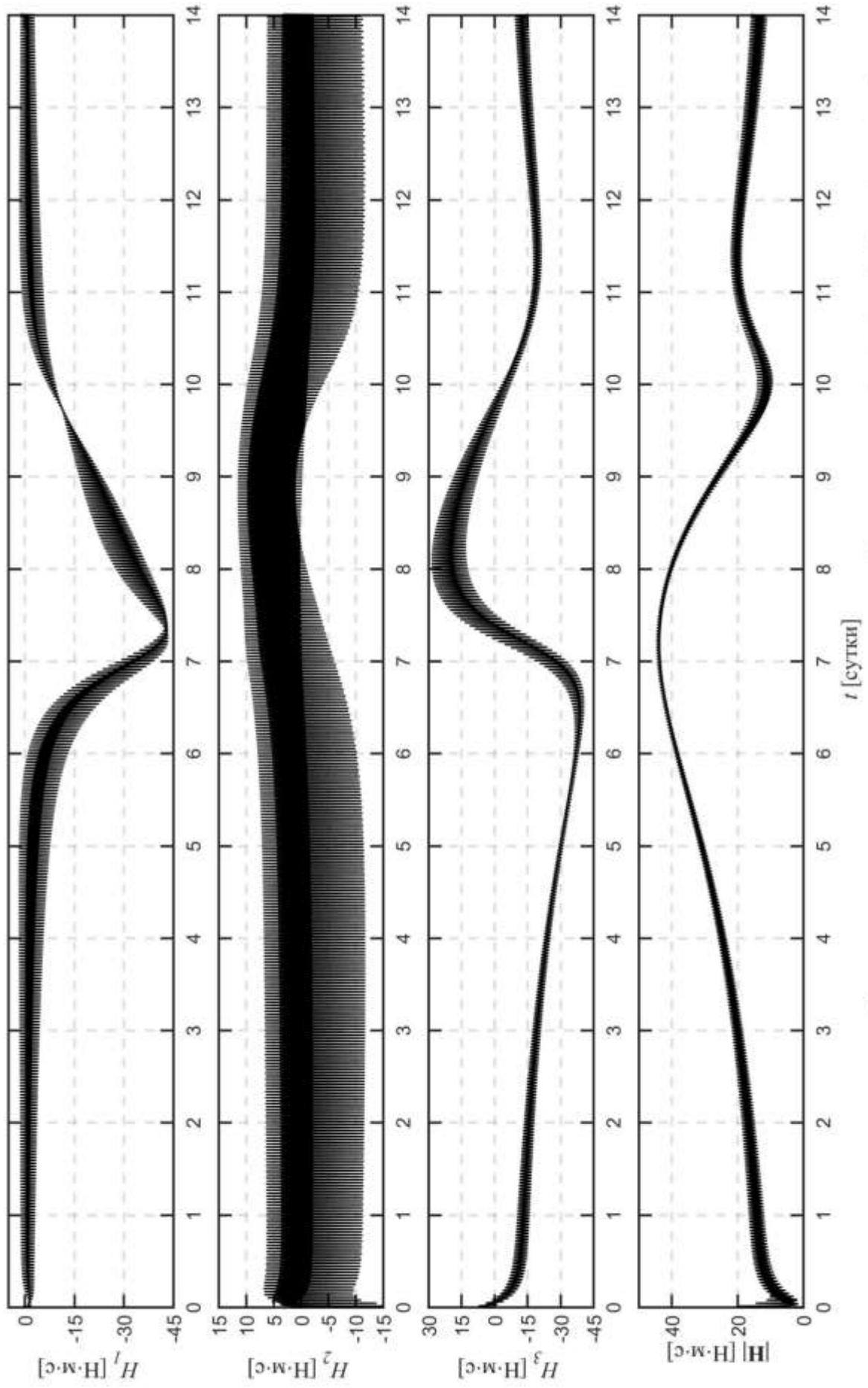


Рис. 5.12. Гиросtatический момент КА в режиме его солнечной ориентации (5.7), (5.12) (Орбита I (b)).

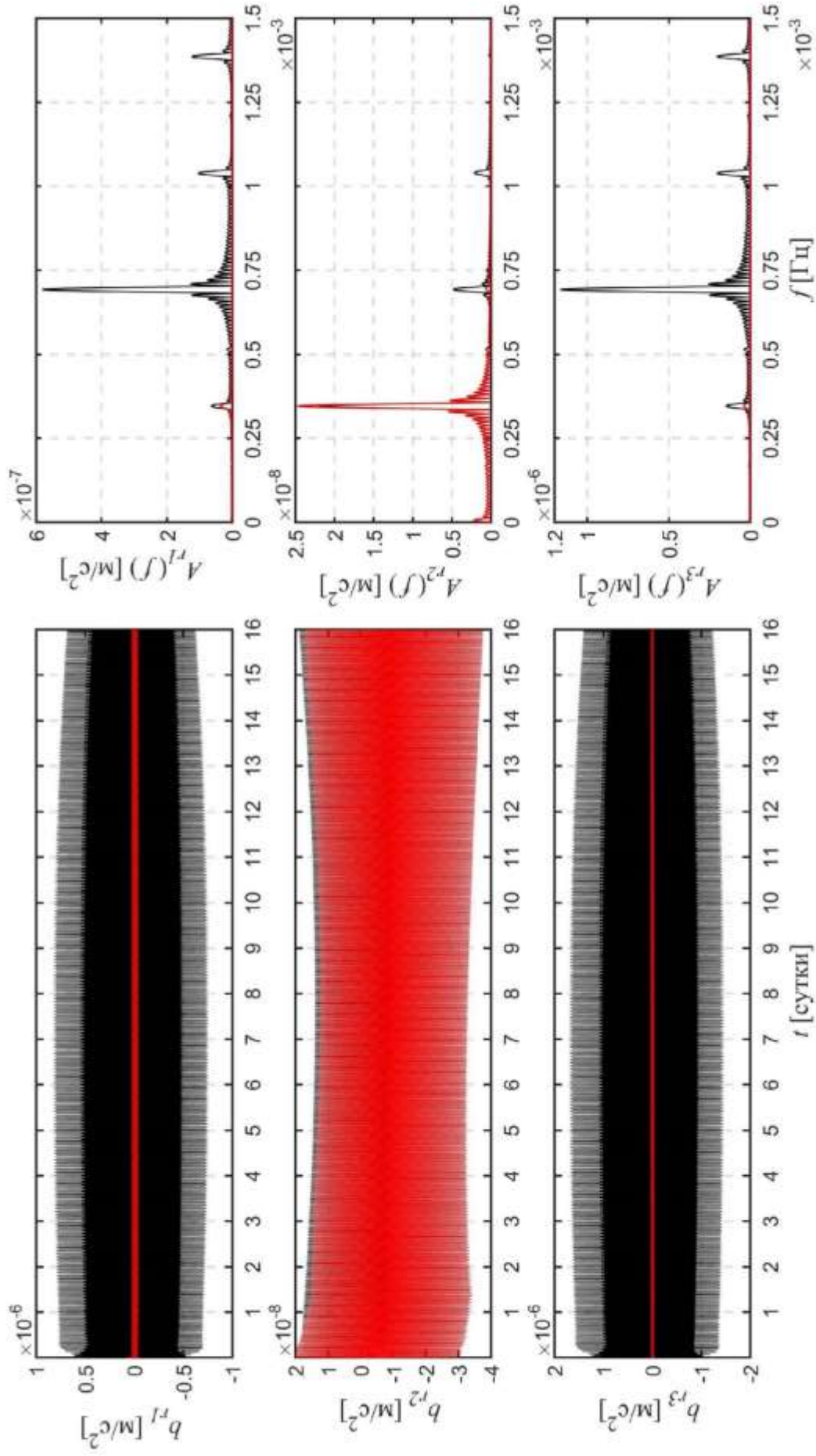


Рис. 5.13. Сравнения компонент составляющей микроускорения $\mathbf{b}_r$ и их амплитудных спектров в режиме солнечной ориентации КА (Орбита I (b)).

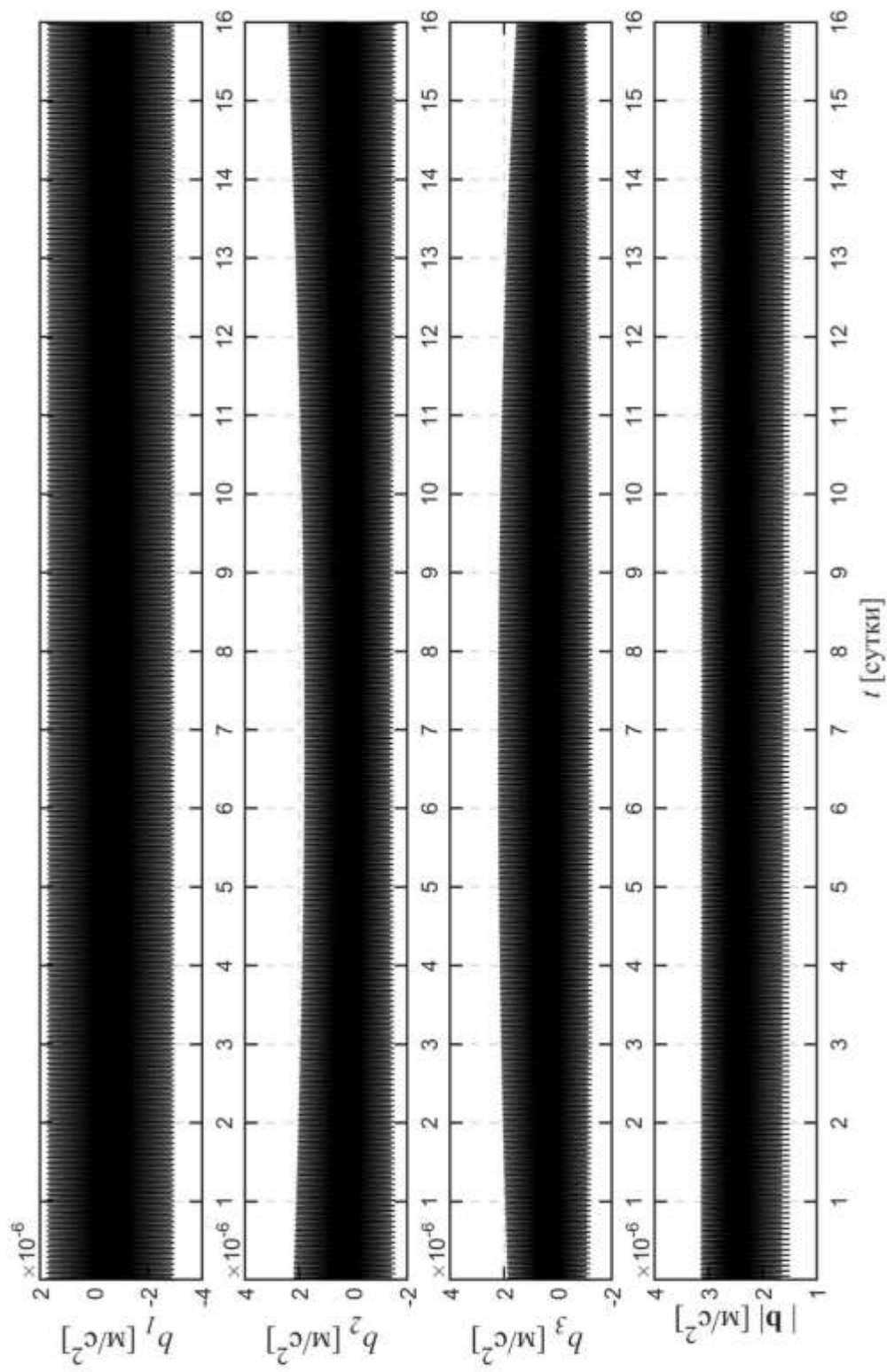


Рис. 5.14. Микроускорения КА в режиме его солнечной ориентации (5.7) (Орбита **I** (**b**)).

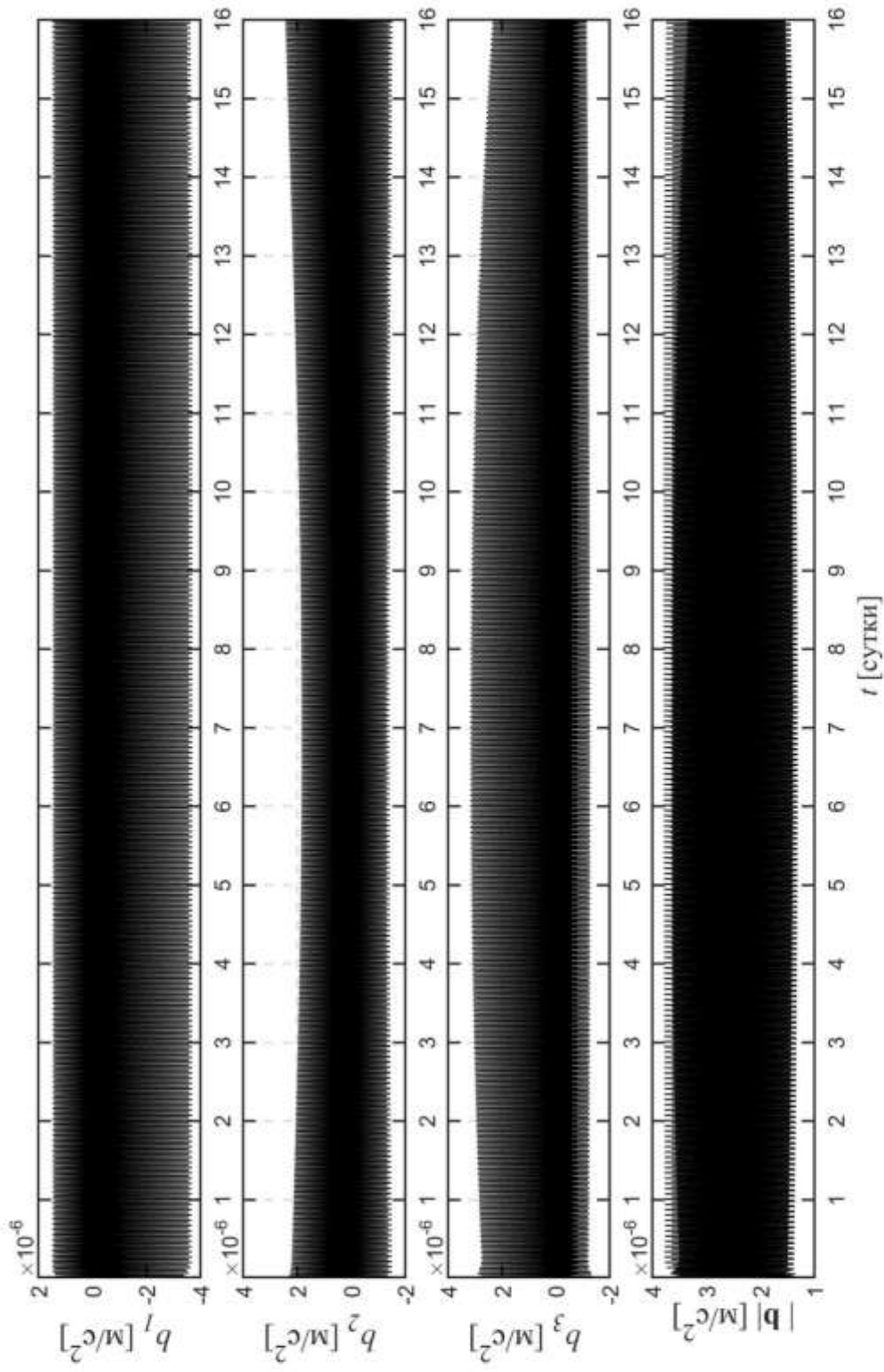


Рис. 5.15. Микроускорения КА в режиме его солнечной ориентации (5.7), (5.12) (Орбита I (b)).

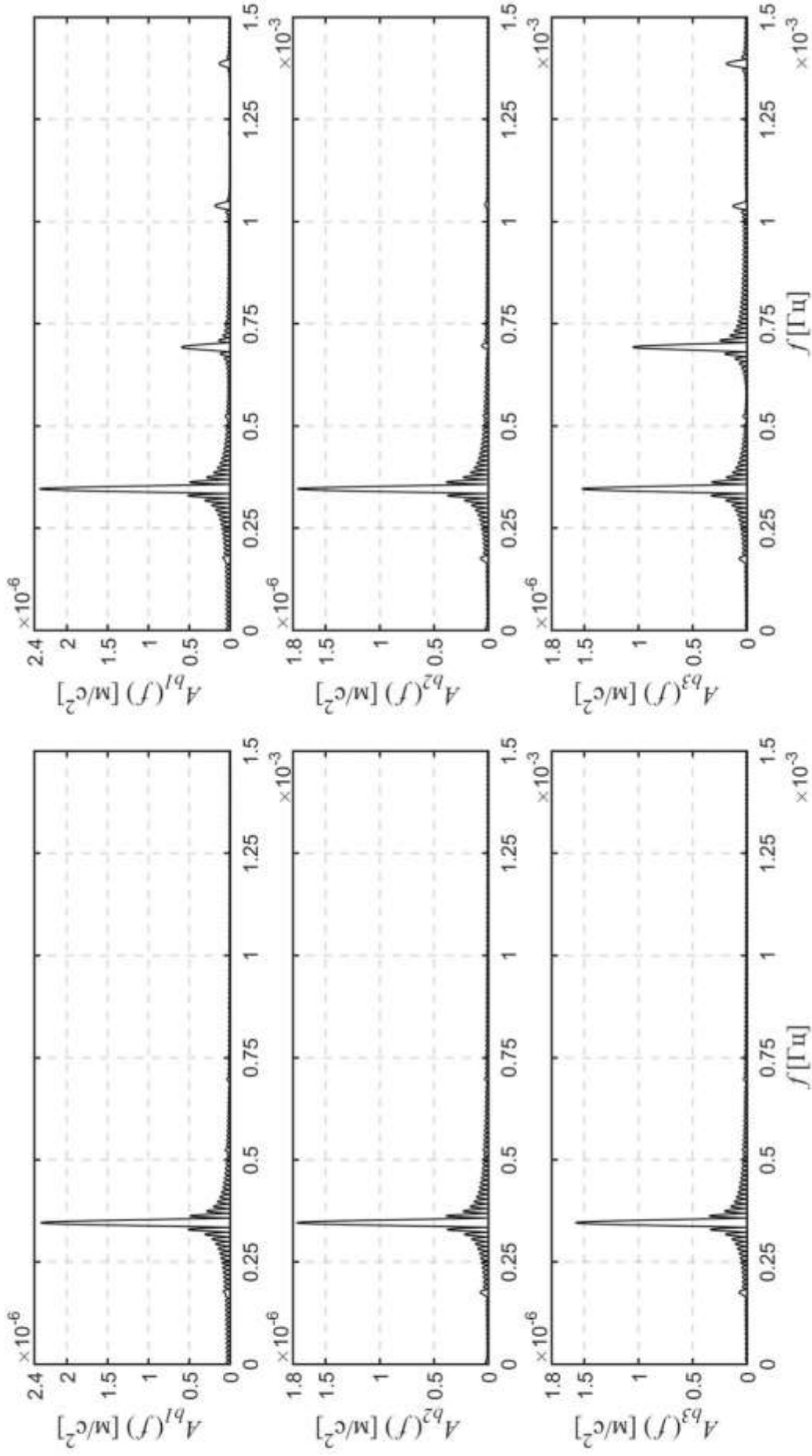


Рис. 5.16. Амплитудные спектры полных микроускорений КА (Орбита I (b)).

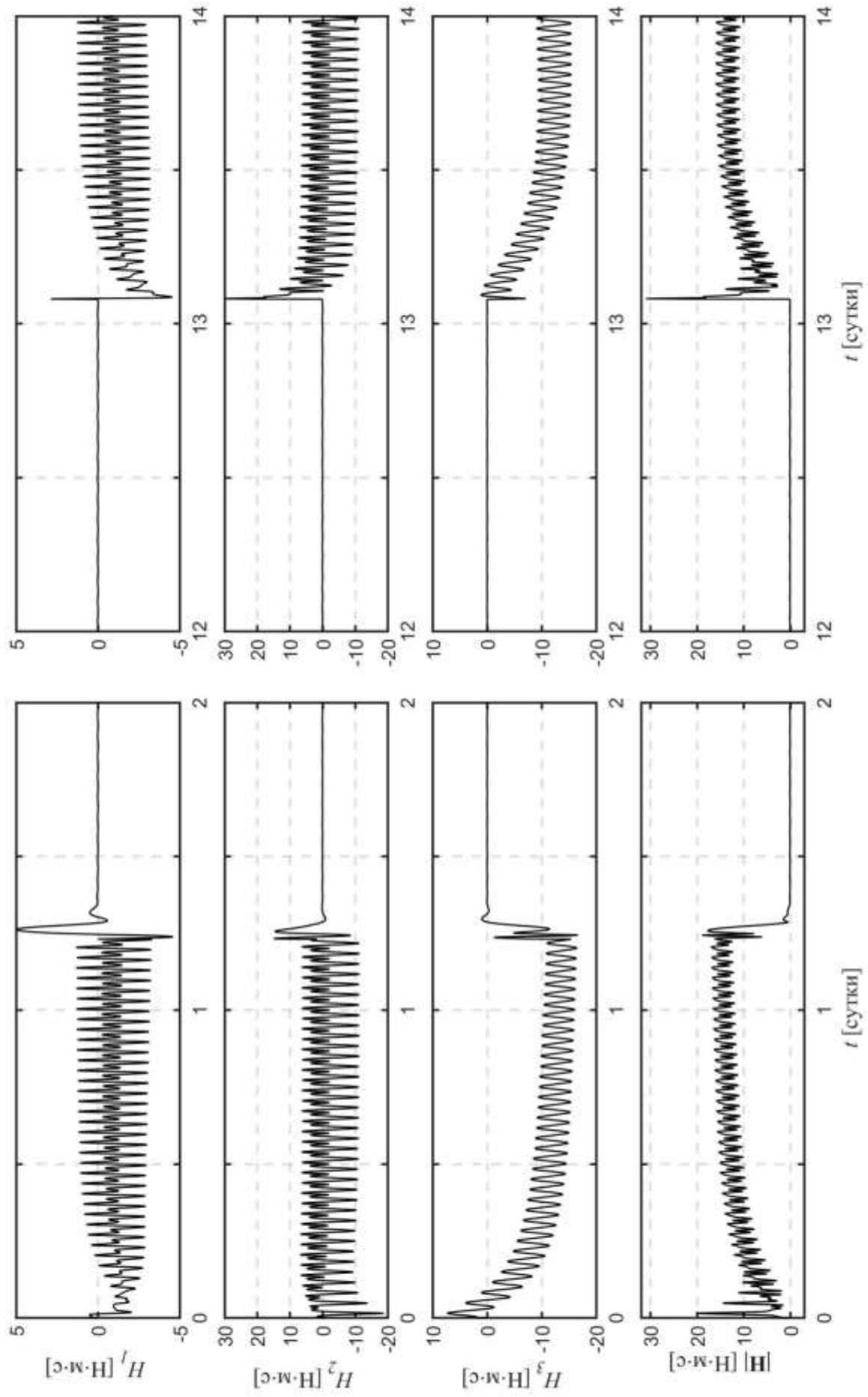


Рис. 5.17. Гиросtatический момент КА при смене режимов ориентации (Орбита I (b)).

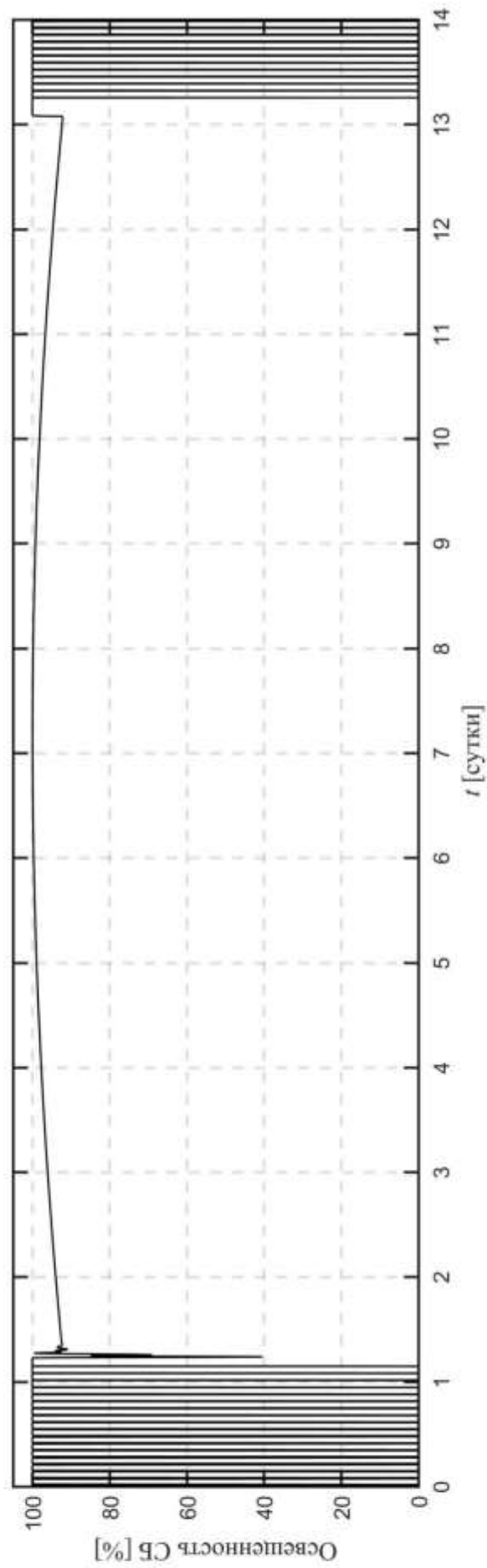


Рис. 5.18. Освещенность панелей солнечных батарей КА при смене режимов ориентации (**Орбита I (b)**).

5.2 Управление угловым движением космического аппарата с помощью электромагнитной системы ориентации

Покажем, что поддержание режима солнечной ориентации КА можно осуществить с помощью электромагнитных органов управления. Космический аппарат при это является гироскопом, но вектор гироскопического момента постоянен по модулю и направлению относительно связанной системы координат. Таким образом, управление угловым движением КА осуществляется за счет изменения собственного магнитного момента электромагнитов.

5.2.1 Уравнения углового движения космического аппарата

Космический аппарат считаем гироскопом, центр масс которого движется по геоцентрической орбите. Уравнения движения КА состоят из двух подсистем (см. п. 1.3). Подсистема уравнений углового движения образована динамическими уравнениями Эйлера и уравнениями (1.9) для компонентов нормированного кватерниона Q . В уравнениях Эйлера учитываются гравитационный $\mathbf{M}_g$ (1.5) и аэродинамический $\mathbf{M}_a$ (1.6) моменты, а также момент $\mathbf{M}_m$ (1.7) создаваемый взаимодействием электромагнитных исполнительных органов системы управления угловым движением КА с МПЗ. Уравнения Эйлера представим в виде

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{d}\omega_1}{dt} &= \mu(\omega_2\omega_3 - v\eta_2\eta_3) + (m_{m1} + m_{a1}), \\ \frac{\tilde{d}\omega_2}{dt} &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - v\eta_1\eta_3) + \frac{\lambda}{1+\lambda\mu}(m_{m2} + m_{a2} - h\omega_3), \\ \frac{\tilde{d}\omega_3}{dt} &= -(1-\lambda+\lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - v\eta_1\eta_2) + \lambda(m_{m3} + m_{a3} + h\omega_2),\end{aligned}\tag{5.16}$$

$$\lambda = I_1 / I_3, \mu = (I_2 - I_3) / I_1, m_{a1} = 0, m_{a2} = p v_3 / I_1, m_{a3} = -p v_2 / I_1.$$

Здесь $m_{mi} = M_{mi} / I_1$, $l_i = L_i / I_1$, $i = \overline{1,3}$, M_{mi} – компоненты вектора $\mathbf{M}_m$, $I_1 h$ – гироскопический момент КА (направлен по оси Ox_1), B_i – компоненты вектора

магнитной индукции МПЗ, полученные из модели IGRF (см. п. 1.2).

Чтобы замкнуть подсистему уравнений углового движения КА, к уравнениям (5.16) надо добавить соотношения, описывающие изменение величин l_i . Явный вид этих соотношений будет указан ниже.

5.2.2 Стабилизация космического аппарата - гиростата

Уравнения (5.16) громоздки и неудобны для пояснения режима солнечной ориентации КА-гиростата. Этот режим и способ его стабилизации поясним с помощью более простых уравнений, учитывающих только главные факторы. А именно, предположим, что КА имеет ось материальной симметрии Ox_1 , т.е. $\mu=0$, орбита центра масс КА – круговая и неизменна в абсолютном пространстве, на КА действует только гравитационный момент. Угловое движение КА описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= 0, \quad \dot{\omega}_2 = (1-\lambda)(\omega_1\omega_3 - 3\omega_0^2\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_3) - \lambda h\omega_3, \\ \dot{\omega}_3 &= -(1-\lambda)(\omega_1\omega_2 - 3\omega_0^2\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2) + \lambda h\omega_2,\end{aligned}\quad (5.17)$$

$$\dot{\gamma} = \omega_1 - \operatorname{tg}\beta(\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \quad \dot{\delta} = \frac{\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma}{\cos \beta}, \quad \dot{\beta} = \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma,$$

$$\tilde{\eta}_i = \tilde{u}_{1i} \sin u + \tilde{u}_{3i} \cos u, \quad i = \overline{1,3}.$$

Здесь u – аргумент широты КА (угол между осью $O_E Z_3$ и радиусом-вектором $\mathbf{r}$), $\dot{u} = \omega_0$, элементы матрицы $\tilde{U} = (\tilde{u}_{ij})_{i,j=1}^3$ выражаются с помощью углов γ , δ , β по формулам (1.2').

В силу первого уравнения (5.17) $\omega_1 = \text{const.}$ Будем считать эту величину параметром. Заменяем ω_2 и ω_3 переменными

$$\Omega_2 = \omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma, \quad \Omega_3 = \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma$$

и введем новый параметр $H = \lambda h + \omega_1$. В новых переменных уравнения (5.17) распадаются на не зависящую от γ подсистему

$$\dot{\Omega}_2 = -(H - \Omega_2 \operatorname{tg}\beta)\Omega_3 - 3\omega_0^2(1-\lambda)\sin(\delta - u)\cos(\delta - u)\cos\beta,$$

$$\dot{\Omega}_3 = (H - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta) \Omega_2 - 3\omega_0^2 (1 - \lambda) \cos^2(\delta - u) \sin \beta \cos \beta, \quad (5.18)$$

$$\dot{\delta} = \Omega_2 / \cos \beta, \quad \dot{\beta} = \Omega_3,$$

и уравнение $\dot{\gamma} = \omega_1 - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta$. Параметры H и ω_1 будем считать независимыми.

При $|H| \gg \omega_0$ уравнения (5.18) допускают решения, в которых

$$\Omega_2 \approx [3\omega_0^2 (1 - \lambda) \cos^2(\delta - u) \sin \beta \cos \beta] / H,$$

$$\Omega_3 \approx -[3\omega_0^2 (1 - \lambda) \sin(\delta - u) \cos(\delta - u) \cos \beta] / H.$$

Подставив эти соотношения в последние два уравнения (5.18), получим

$$\dot{\delta} = [3\omega_0^2 (1 - \lambda) \cos^2(\delta - u) \sin \beta] / H,$$

$$\dot{\beta} = -[3\omega_0^2 (1 - \lambda) \sin(\delta - u) \cos(\delta - u) \cos \beta] / H.$$

Последние уравнения интегрируются в квадратурах [154]. В случае $|H| \gg \omega_0$ получить представление об их решениях можно, усреднив правые части уравнений по u . Усредненные уравнения имеют вид

$$\dot{\delta} = 3\omega_0^2 (1 - \lambda) \sin \beta / 2H, \quad \dot{\beta} = 0.$$

Для дальнейшего представляют интерес стационарные решения этих уравнений. В них $\beta = 0$, а δ – произвольная постоянная. В [103] доказано, что для любого δ_0 и достаточно больших H , таких, что $\sin(\pi H / 2\omega_0)$ не лежит в малой окрестности нуля, уравнения (5.17) имеет периодическое решение с периодом π / ω_0 , удовлетворяющие условиям

$$\delta - \delta_0 = O(H^{-1}), \quad \beta = O(H^{-1}), \quad \Omega_2 = O(H^{-1}), \quad \Omega_3 = O(H^{-1}).$$

Для этого решения можно так выбрать $\omega_1 = O(H^{-2})$, что при любом γ_0 будет выполняться соотношение $\gamma = \gamma_0 + O(H^{-2})$. В соответствующем периодическом решении уравнений (5.17) ось Ox_2 будет совершать малые колебания в окрестности направления, задаваемого углами δ_0 , $\beta = 0$, γ_0 . В частности, можно направить эту ось на Солнце. Указанное выше периодическое решение системы (5.18) является орбитально устойчивым в первом приближении [107].

Из-за разного рода возмущающих факторов ($\mu \neq 0$, эллиптичность орбиты, аэродинамический момент и др.) система (5.16) не имеет решений описанного типа. Но она имеет решения, для которых приведенные выше оценки выполнены на некотором не очень продолжительном отрезке времени. Чтобы обеспечить достаточно точное выполнение этих оценок длительное время (стабилизировать режим солнечной ориентации) можно использовать управляющий момент $\mathbf{M}_m$ (1.7), создаваемый электромагнитами.

5.2.3 Управление угловым движением космического аппарата

Дипольный момент электромагнитов, обеспечивающий стабилизацию режима солнечной ориентации КА, будем искать в виде (4.26), где

$$\mathbf{u} = -I_1 \mathbf{m}_m, \quad (5.19)$$

$\mathbf{m}_m = (m_{m1}, m_{m2}, m_{m3})^T$ – управляющий момент, вид которого предстоит установить.

Режимом солнечной ориентации КА будем называть такое движение, в котором с малыми ошибками выполнены следующие условия: ось Ox_2 направлена на Солнце, ось Ox_1 лежит в плоскости орбиты, угловая скорость КА равна нулю. Эти условия выражаются соотношениями (5.5).

Как и в четвертой главе данной работы представим формулу (1.7) в виде (4.27) и, отбросив слагаемое $\kappa_u |\mathbf{B}|^{-2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$, в виде (4.28). При упрощающем предположении (4.28) режим солнечной ориентации можно реализовать с помощью закона управления [44]

$$m_{m1} = -2\xi\omega_1 + \xi^2 s_3, \quad m_{m2} = -\frac{(1 + \lambda\mu)}{\lambda} 2\xi\omega_2, \quad m_{m3} = -\frac{1}{\lambda} (2\xi\omega_3 + \xi^2 s_1) \quad (5.20)$$

при достаточно большом значении коэффициента $\xi > 0$. Уравнения движения КА в этом случае имеют решения, в которых приближенно выполнены все условия (5.5) кроме первого [44]. Выполнение условия $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}$ обеспечивается достаточно большим гиросtatическим моментом, направленным вдоль оси Ox_1 .

Здесь имеет место ситуация, которая в упрощенном виде исследована в [103].

В случае упрощающего предположения (4.28) более точный режим солнечной ориентации можно реализовать с помощью закона управления

$$m_{m1} = -2\xi\omega_1 + \xi^2 s_3, \quad m_{m2} = -\frac{(1 + \lambda\mu)}{\lambda}(2\xi\omega_2 - \xi^2 n_3), \quad (5.21)$$

$$m_{m3} = -\frac{1}{\lambda} \left[2\xi\omega_3 + \xi^2 (s_1 + n_2) \right].$$

Законы (5.20) и (5.21) оказались достаточно эффективными и при использовании формулы (4.27), т.е. с учетом ограничения, обусловленного реализацией посредством электромагнитов.

5.2.4 Математическое моделирование режима солнечной ориентации

С помощью математического моделирования покажем возможности электромагнитной системы управления КА при реализации выбранного закона изменения управляющего момента (5.21). Цель моделирования – продемонстрировать, что выбранный закон управления обеспечивает гашение возмущенного движения КА и стабилизацию режима солнечной ориентации. Вычислим решения системы (1.9), (5.16) в двух вариантах. Первый вариант подразумевает наличие управления в виде (4.27), (5.19), (5.21). Второй вариант предполагает управление в виде (4.28), (5.19), (5.21), которое является чисто теоретическим и рассматривается здесь для оценки влияния слагаемого $\kappa_u |\mathbf{B}|^{-2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$ на режим солнечной ориентации КА. При моделировании полагаем, что в предлагаемой системе управления угловым движением КА каждая компонента L_i вектора $\mathbf{L}$ реализуется собственным электромагнитом. Система имеет три одинаковых электромагнита. Их дипольные моменты, реализующих компоненты L_1 , L_2 и L_3 , параллельны осям Ox_1 , Ox_2 и Ox_3 соответственно. В момент времени $t=0$ КА в гринвичской системе координат занимает положение (5.5), т.е. $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$. Собственный магнитный момент электромагнитов $\mathbf{L}(0) = 0$. Начальные значения компонент угловой скорости ω_i ,

$i = \overline{1,3}$, задавались с учетом ошибок в их реализации:

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0.01^\circ/\text{с}.$$

Геометрические и массово-инерционные параметры КА указаны в п. 1.3, т.е. $\lambda = 0.238$ и $\mu = 0.077$. При численном интегрировании уравнений движения центра масс КА в данной главе в качестве начальных условий использовались параметры **Орбиты I (а)**. Компоненты орта $\mathbf{s}$ в гринвичской системе координат рассчитывались по приближенным формулам [168]. Все расчеты выполнялись при $\kappa_u = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, $I_1 h = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, $\xi = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, в тени Земли соотношения (5.21) не нарушались.

Результаты моделирования представлены графиками зависимости от времени углов γ , δ , β и угла $\sigma = \arccos(\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_2)$. На рисунках представлены также графики компонент угловой скорости ω_i , собственного магнитного момента электромагнитов L_i , $i = \overline{1,3}$, и освещенности панелей СБ. Все графики на рис. 5.19 – 5.22 построены на интервалах времени 6 суток. Черным цветом изображены результаты моделирования при управлении (4.27), (5.19), (5.21), красным – при управлении (4.28), (5.19), (5.21). На отрезке времени в несколько часов который примыкает к точке $t = 0$ виден переходной процесс. В данном случае этот процесс обусловлен ошибками в задании начальной угловой скорости. Из графика значений угла σ , представленного внизу рис. 5.19, видно, что точность ориентации КА при использовании управления (4.27), (5.19), (5.21) колеблется в диапазоне $5^\circ \div 20^\circ$. Такая точность режима солнечной ориентации КА обеспечивает вполне приемлемый энергосъем с панелей СБ, что видно из графика, представленного на рис. 5.22. Освещенность панелей СБ рассчитывалась с учетом прохождения КА через тень Земли с использованием формулы (5.15).

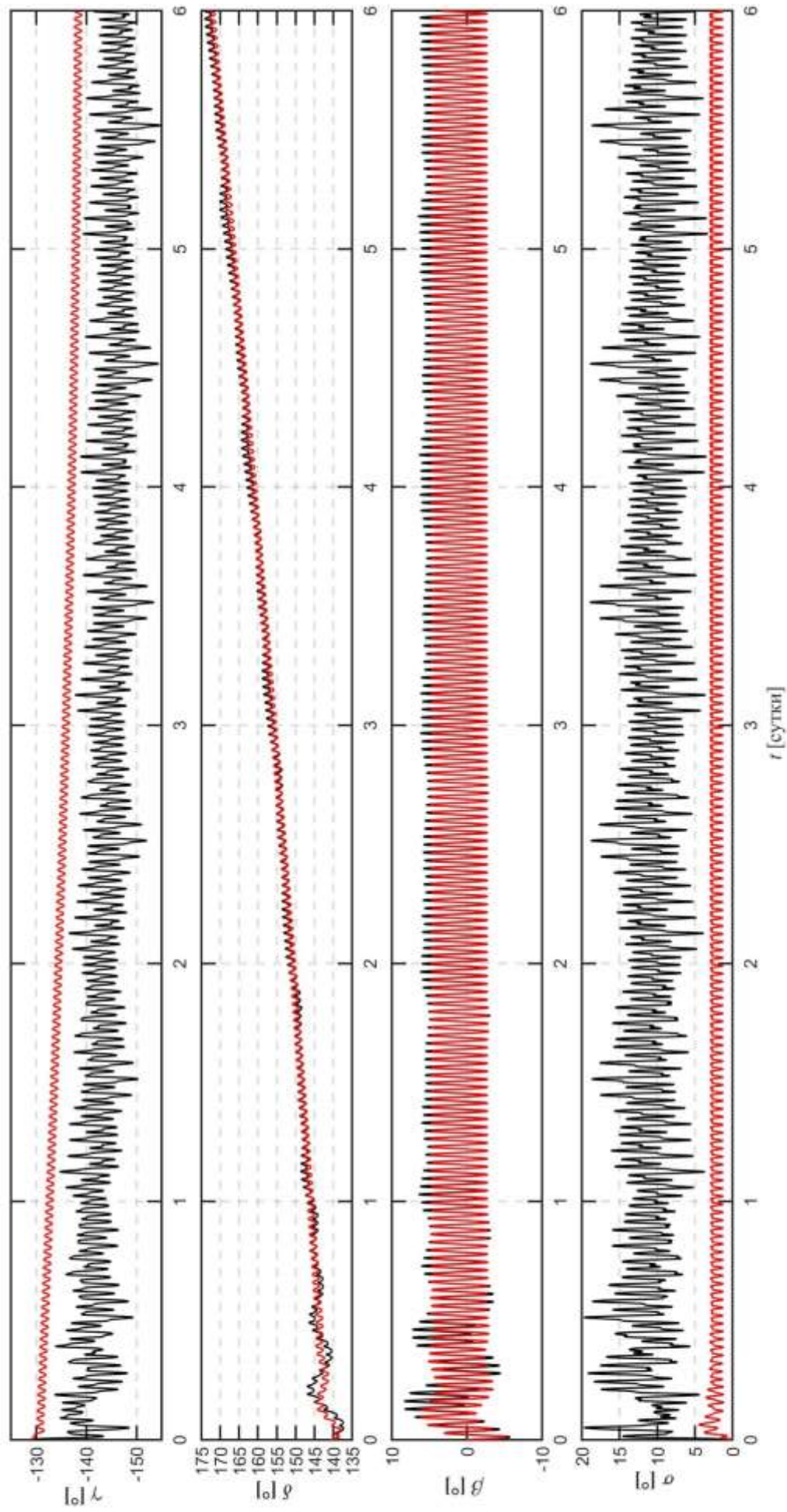


Рис. 5.19. Углы ориентации КА, черные линии – при управлении (4.27), (5.19), (5.21), красные линии – при управлении (4.28), (5.19), (5.21).

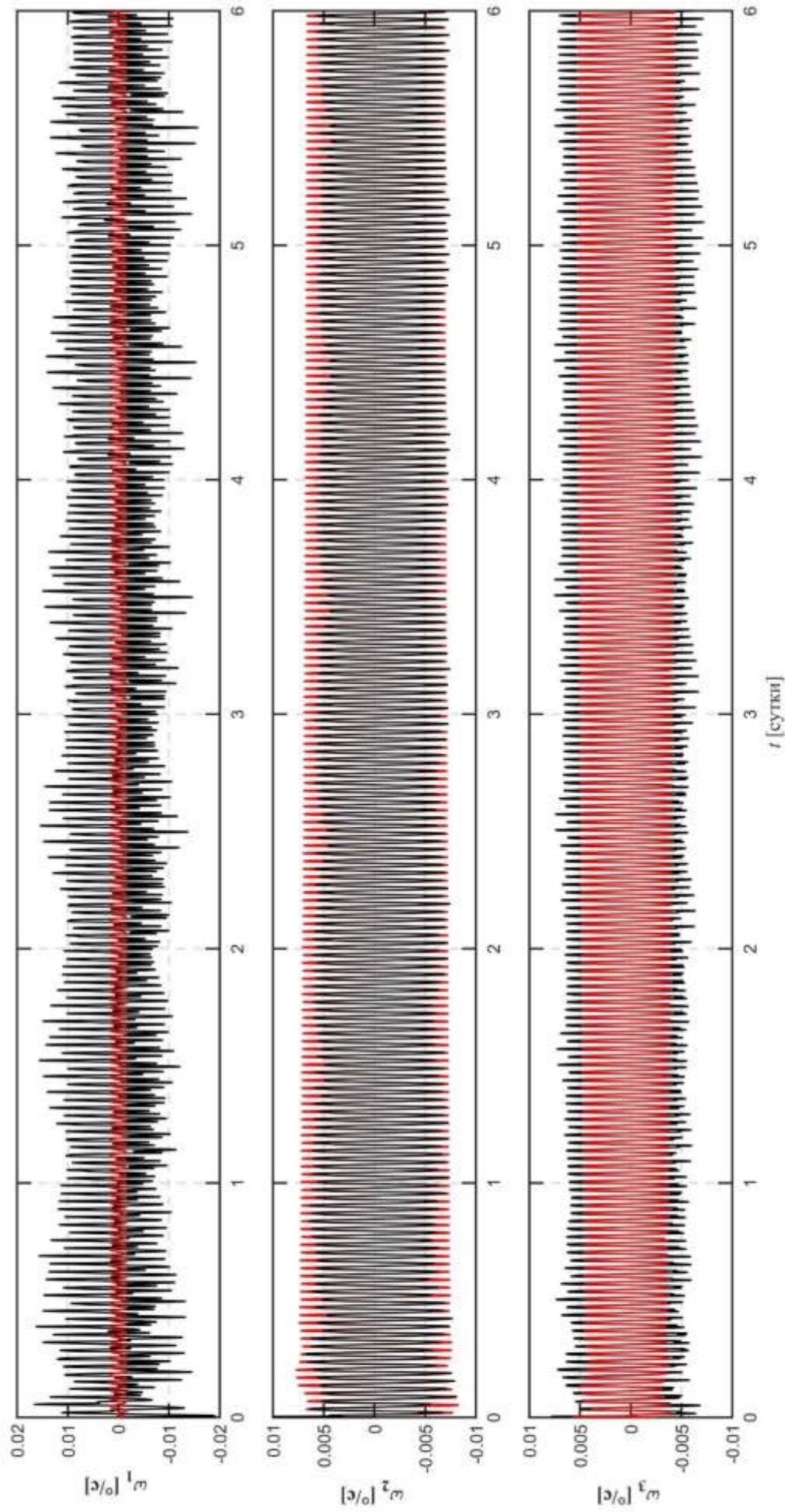


Рис. 5.20. Угловые скорости КА, черные линии – при управлении (4.27), (5.19), (5.21),
красные линии – при управлении (4.28), (5.19), (5.21).

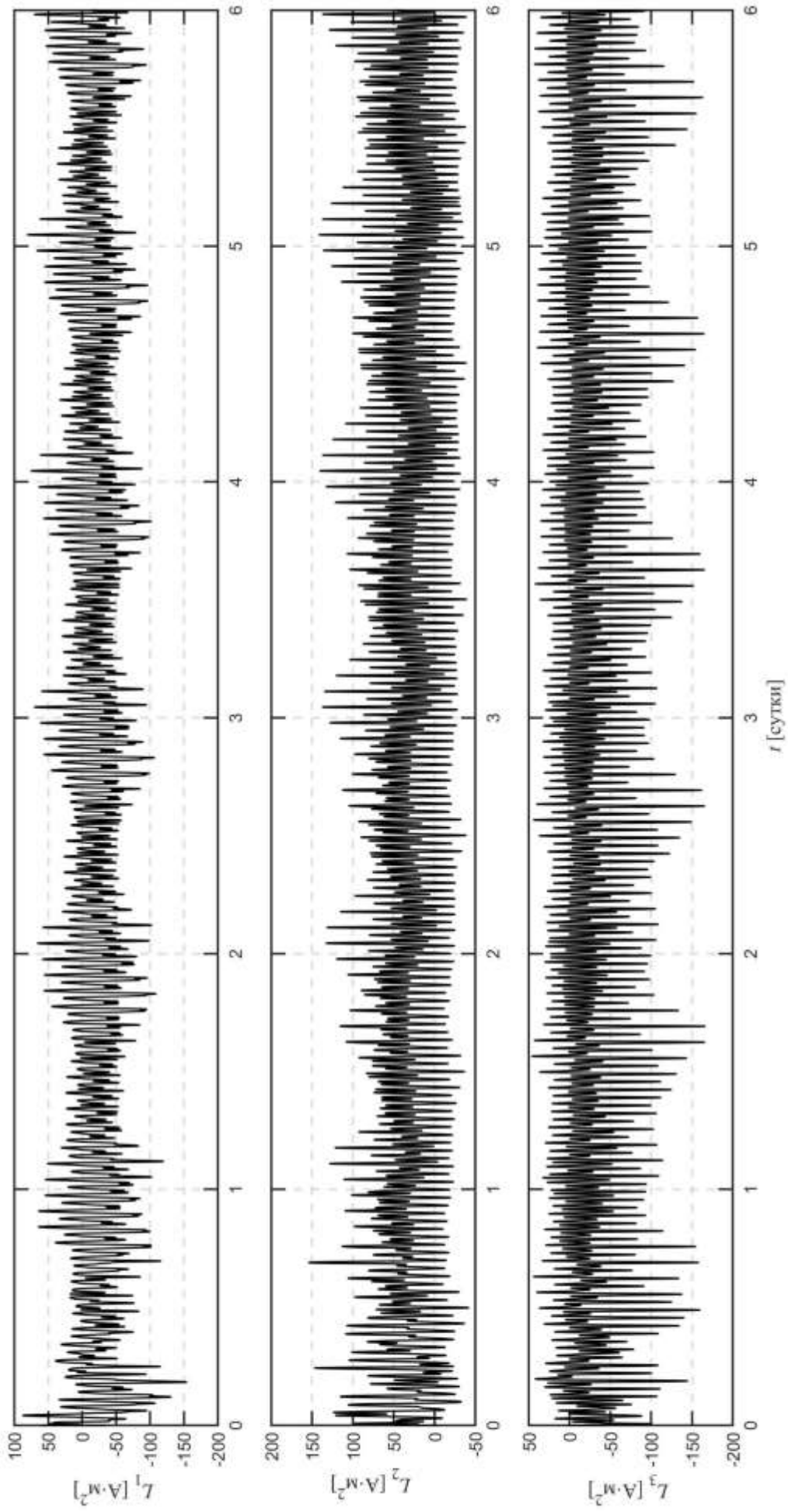


Рис. 5.21. Компоненты магнитного момента электромагнитов при управлении (4.27), (5.19), (5.21).

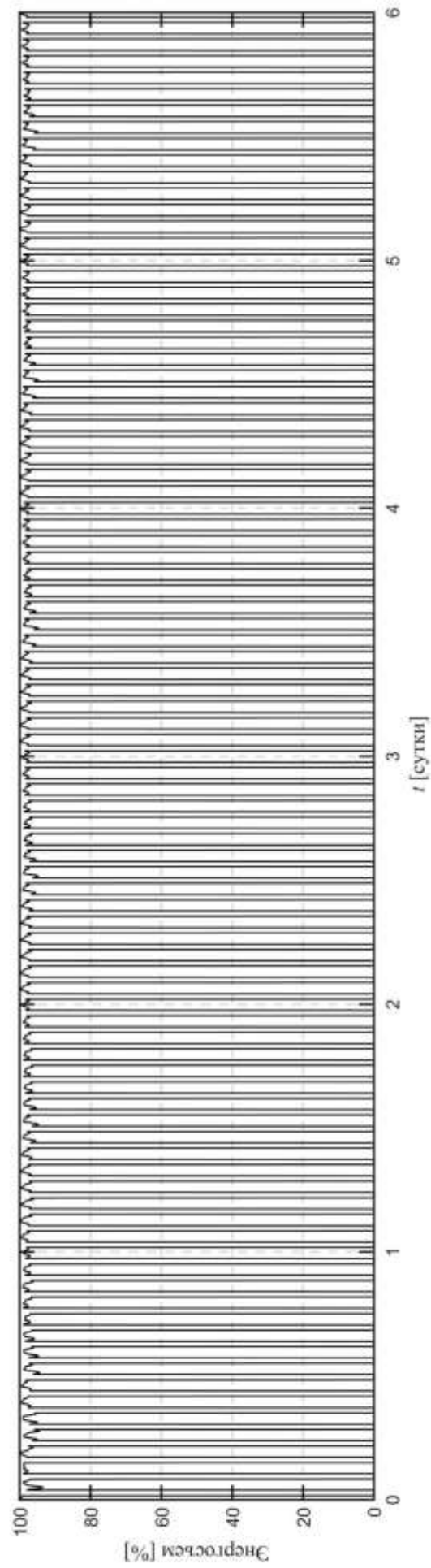


Рис. 5.22. Освещенность панелей солнечных батарей КА при управлении (4.27), (5.19), (5.21).

5.2.5 Периодическая аппроксимация ориентированного движения космического аппарата

Воспользуемся методом, предложенным в второй главе данной работы для исследования устойчивости установившегося углового движения КА представленного на рис. 5.19, 5.20 (только графики черного цвета). Анализ результатов численного моделирования, представленных на этих рисунках, показывает, что установившийся режим солнечной ориентации КА похож на периодическое движение. Основываясь на этом свойстве, построим аппроксимации режима солнечной ориентации КА набором периодических движений. Также, как и в п. 4.2.5 предыдущей главы, построение периодического решения системы (1.9), (5.16) при $\omega_E = 0$ (такую систему обозначим (5.22)) сводится к решению для этой системы периодической краевой задачи (4.33). Метод решения такой задачи описан в п. 4.2.5.

На рис. 5.23, 5.24 приведены результаты аппроксимации рассмотренного ранее решения системы (1.9), (5.16) с управлением (4.27), (5.19), (5.21) решениями краевой задачи (4.33), (5.22). Здесь изображены графики зависимости от времени углов γ , δ , β и компонент угловой скорости ω_i , $i = \overline{1,3}$. Графики аппроксимируемого решения – черные, графики аппроксимирующих решений – красные. При построении аппроксимации пропущен участок переходного процесса. Начальное приближение при решении краевой задачи задавалось следующими начальными условиями в соответствующих точках t_0 : ось Ox_2 направлена по орту $s(t_0)$, ось Ox_1 лежит в плоскости кеплеровой орбиты, начальные значения угловой скорости – нулевые. Красные графики в малых окрестностях моментов прохождения восходящих узлов орбиты налегают друг на друга, но при выбранном масштабе графиков налегания практически не заметны. Как и в п. 4.2.5, аппроксимация оказалась достаточно точной.

Удобство построенной аппроксимации заключается в том, что, рассмотрев семейство решений краевой задачи (4.33), (5.22) для различных значений

долготы восходящего узла орбиты в «замороженной» гринвичской системе координат, вычислив мультипликаторы этого семейства, можно выбрать подходящие параметры законов управления и сами эти законы. В данном случае выбиралась величина постоянного гиросtatического момента $I_1 h$ КА.

На рис. 5.25, 5.26 приведены начальные условия решений краевой задачи (4.33), (5.22) в зависимости от долготы восходящего узла орбиты Ω_G . Здесь момент t_0 и угол ψ между ортом $\mathbf{s}$ и осью $O_E Z_2$ фиксированы: $t_0 = 07:13:07$ UTC 05.05.2013, $\psi = 128.95^\circ$. Этот угол и элементы кеплеровой орбиты (кроме долготы восходящего узла) соответствуют принятой **Орбите I (а)** КА на указанный момент времени. Начальные условия представлены значениями углов γ , δ , β и компонент угловой скорости ω_i , $i = \overline{1,3}$, в момент t_0 .

На рис. 5.27 представлен график степени устойчивости решений краевой задачи (4.33), (5.22), использованных для аппроксимации углового движения КА при управлении (4.27), (5.19), (5.21) (см. рис. 5.23, 5.24). Степень устойчивости рассчитывалась по формуле (4.34). Как видно из рисунка аппроксимирующее периодическое решение асимптотически устойчиво.

Основные результаты главы 5

В пятой главе диссертационной работы показано, что с помощью гироскопических исполнительных органов системы управления угловым движением КА можно реализовать режим длительной солнечной ориентации КА без использования каких-либо других исполнительных органов для проведения разгрузки накопленного кинетического момента. Предложен соответствующий закон управления собственным кинетическим моментом гиросистемы, ограничивающий накопление гиросtatического момента за счет малых (порядка нескольких градусов) поворотов корпуса КА относительно нормали к панелям СБ. Этот же закон можно использовать не только для поддержания ориентации КА в абсолютном пространстве, но и для проведения разгрузки накопленного гиросtatического момента. Приведены результаты численного моделирования,

демонстрирующие эффективность предложенного закона управления, в том числе микроускорения, возникающие на борту КА, а также их амплитудные спектры. Показано, что такое управление КА наименее эффективно в случае, когда угол между направлением на Солнце и плоскостью орбиты превышает 75 градусов. Поэтому проведено численное моделирование углового движения КА для случая, когда при значениях указанного угла больше 75 градусов КА переориентировался в режим орбитальной ориентации, описанный в первой части четвертой главы, а затем снова возвращался в режим солнечной ориентации. В этом случае, законы поддержания и солнечной и орбитальной ориентации КА обеспечивали разгрузку гиросtatического момента накопленного за время разворота. При этом режим орбитальной ориентации КА обеспечивал практически максимальную освещенность панелей СБ, лежащих в плоскости орбиты.

Во второй части пятой главы показано, что рассмотренный выше режим поддержания солнечной ориентации КА можно обеспечить и с помощью электромагнитной системы управления. В этом случае обязательно наличие постоянного гиросtatического момента КА, но поскольку его модуль и направление в связанной с КА системе координат не изменяется, то управление осуществляется именно за счет изменения собственного магнитного момента электромагнитов. Предложен соответствующий закон управления электромагнитами. Приведены результаты численного моделирования, показавшие эффективность предложенного управления угловым движением КА. С помощью метода, описанного во второй главе диссертационной работы, проведено исследование устойчивости установившегося движения КА при стабилизации режима его солнечной ориентации с помощью электромагнитных исполнительных органов. Были вычислены мультипликаторы семейства решений соответствующей краевой задачи для выбранного значения модуля постоянного гиросtatического момента КА.

Основные полученные результаты:

1. Рассмотрен режим солнечной ориентации КА, особенностью которого

является отсутствие возможности поворота панелей солнечных батарей относительно корпуса КА. Построен и исследован закон управления указанным режимом, реализуемый с помощью системы гироскопических исполнительных органов. Предложенный закон управления позволяет не только поддерживать солнечную ориентацию КА на длительных интервалах времени, но и проводить разгрузку накопленного собственного кинетического момента гиросистемы.

2. Предложен и исследован режим солнечной ориентации КА, реализуемый с помощью системы магнитных исполнительных органов при наличии постоянного гиростатического момента. С помощью методики, предложенной в главе 2, проведено численное параметрическое исследование установившегося режима солнечной ориентации КА, позволившее выбрать значение постоянного гиростатического момента КА.

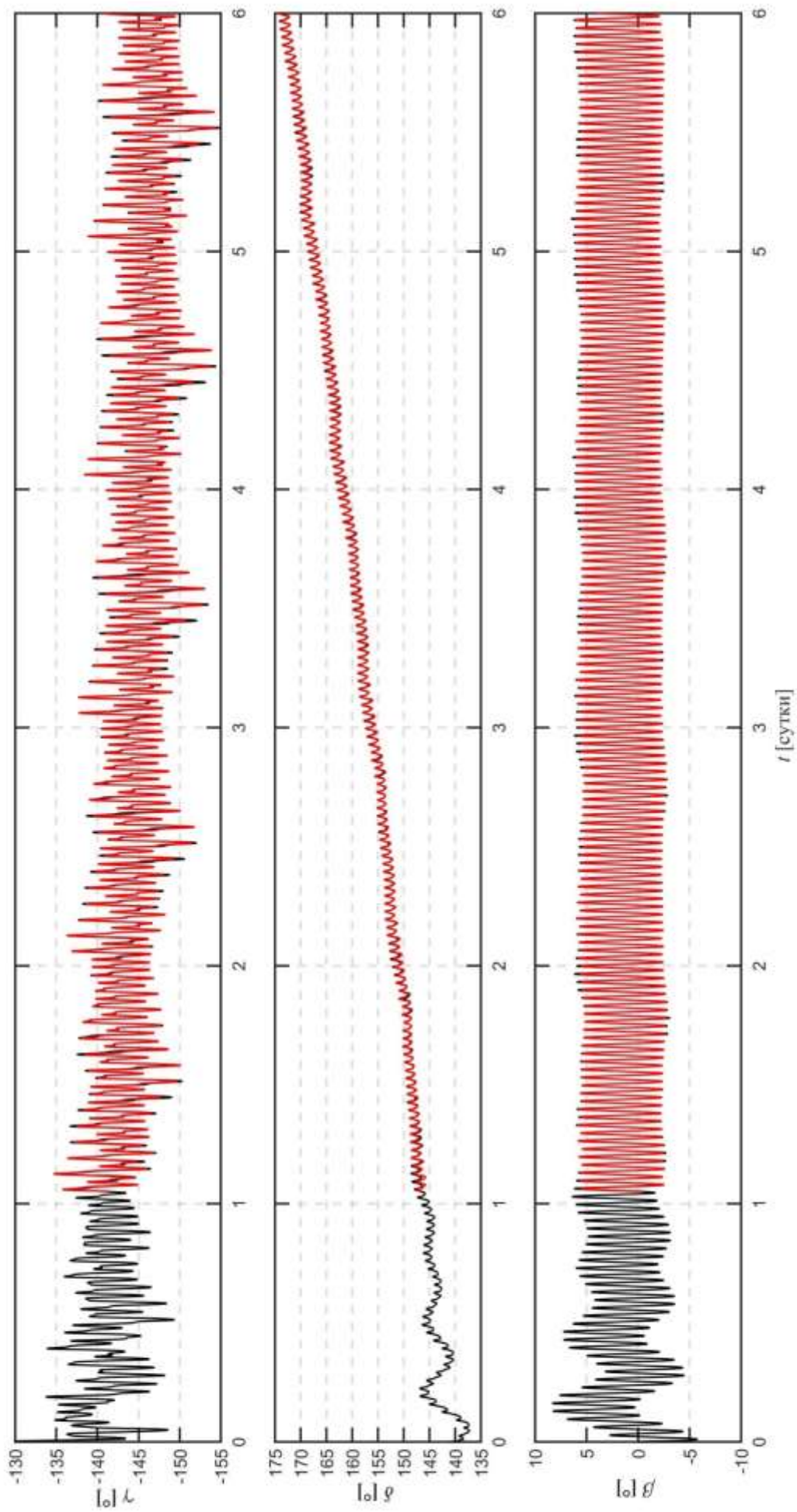


Рис. 5.23. Аппроксимация углов ориентации КА при управлении (4.27), (5.19), (5.21).

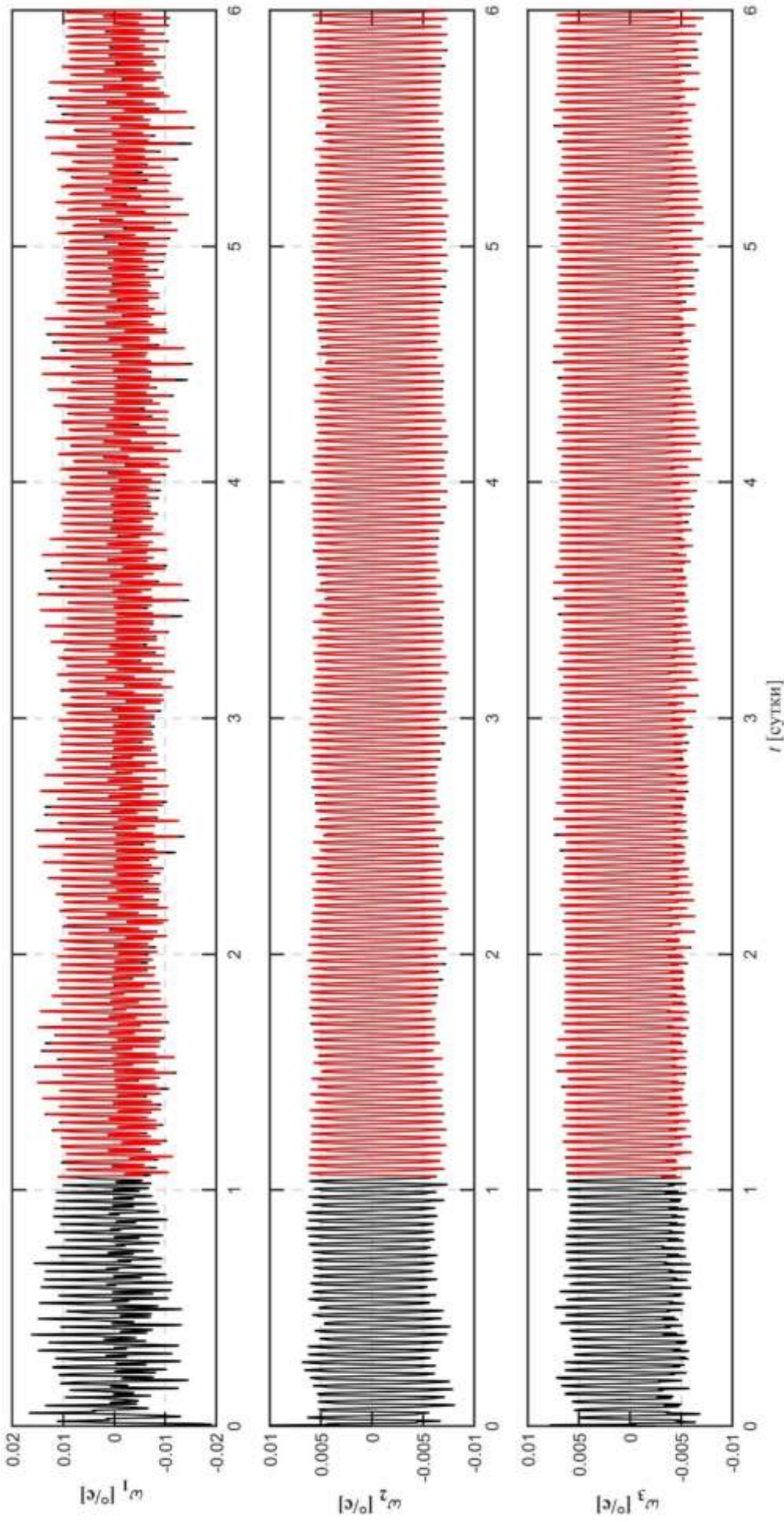


Рис. 5.24. Аппроксимация компонент угловой скорости КА при управлении (4.27), (5.19), (5.21).

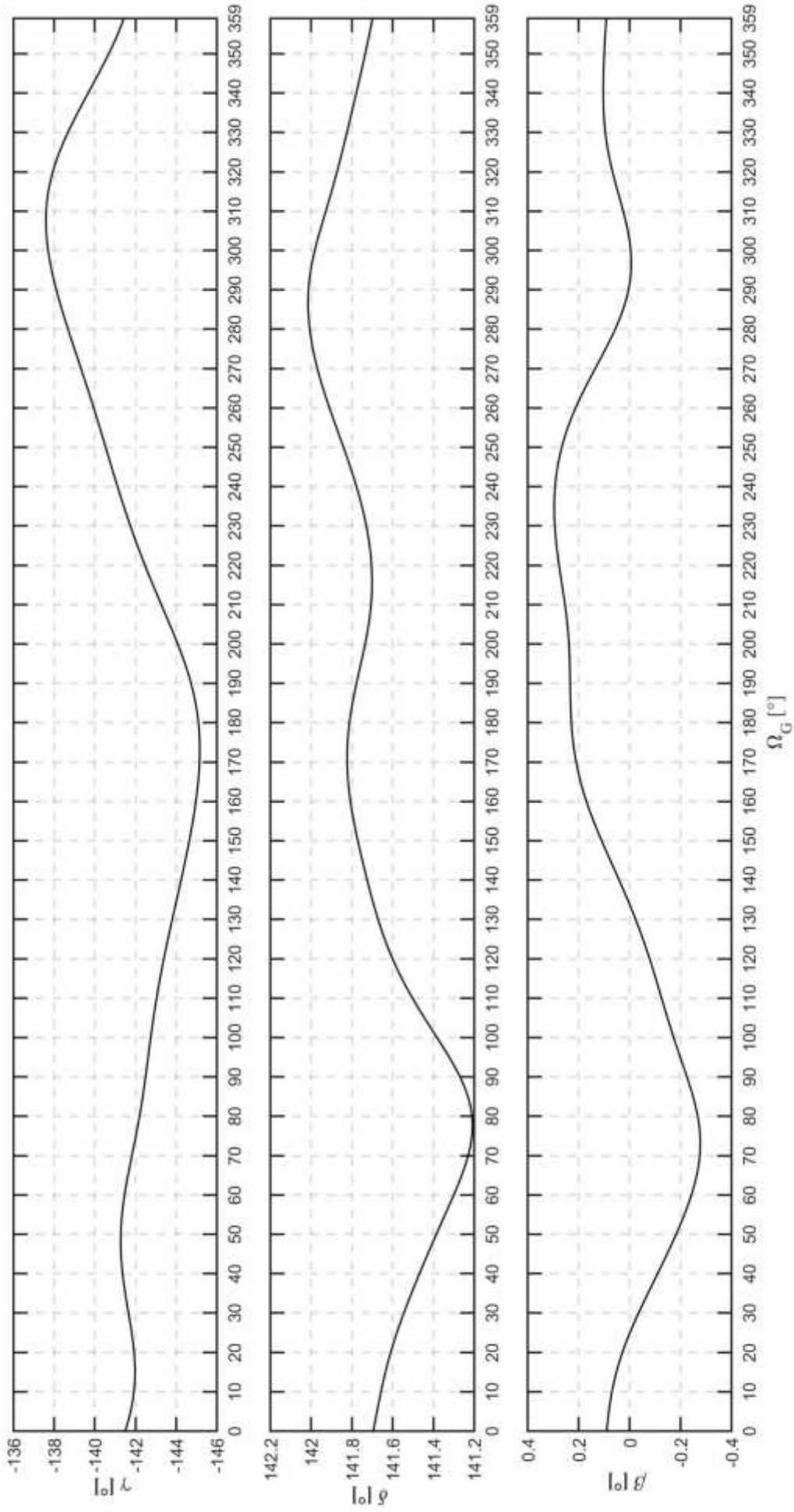


Рис. 5.25. Начальные условия решений краевой задачи (4.33), (5.22) по углам ориентации КА.

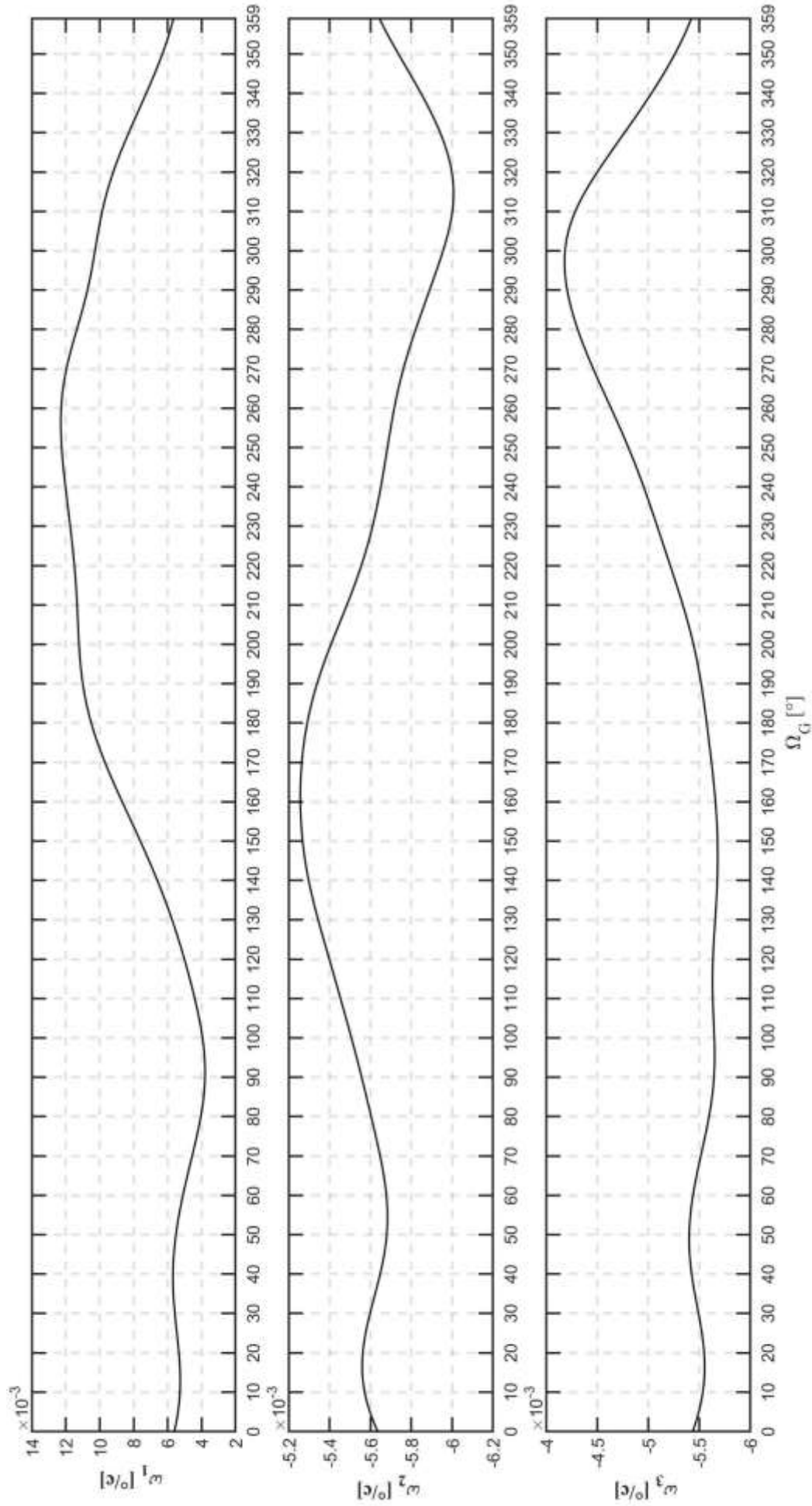


Рис. 5.26. Начальные условия решений краевой задачи (4.33), (5.22) по компонентам угловой скорости.

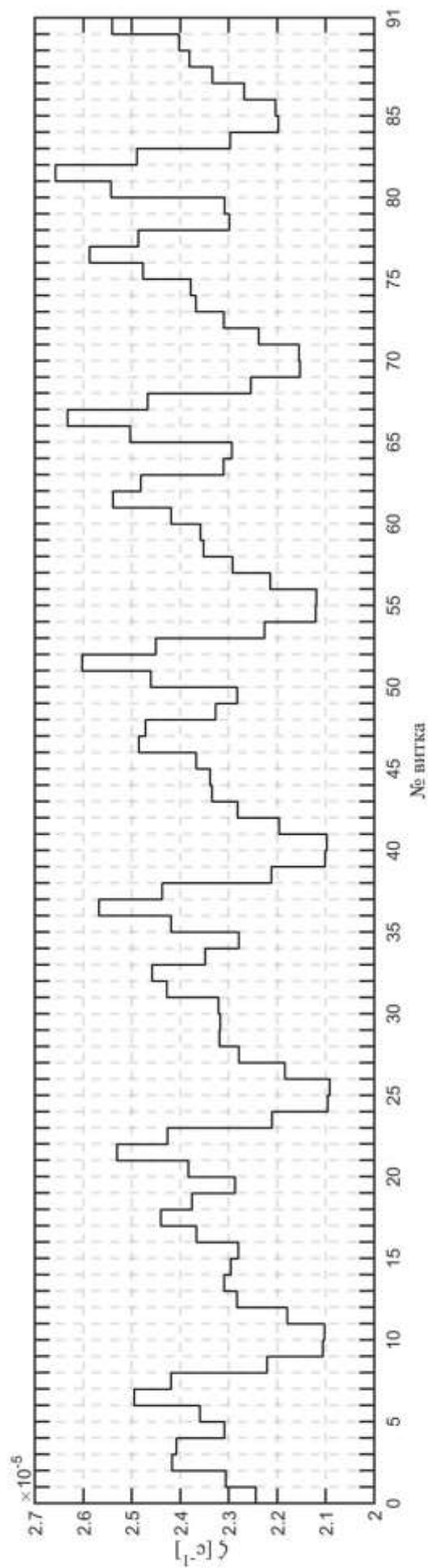


Рис. 5.27. Степень устойчивости решений краевой задачи (4.33), (5.22), использованных для аппроксимации
углового движения КА.

Глава 6. Выбор параметров гиросистемы при различных режимах углового движения космического аппарата

Комплекс электромеханических исполнительных органов (гиросистема), входящий в систему управления КА предназначен для создания управляющих моментов. Во многих случаях при создании длительно существующих КА использованию гиросистемы в составе системы управления нет альтернативы [48]. В то же время электромеханические исполнительные органы являются одними из наиболее массивных и энергопотребляющих устройств, постоянно задействованных в процессе функционирования КА. В связи с этим задачи выбора типа исполнительных органов гиросистемы и оптимизации их характеристик являются актуальными.

Гиросистемы используемые на КА могут быть построены на базе:

- силовых гироскопических комплексов различного типа,
- комплекса управляющих двигателей – маховиков.

Для больших КА с высокими требованиями к динамике и точности ориентации, а также для орбитальных станций целесообразность применения гиросистемы на основе силовых гироскопов с постоянным значением кинетического момента во многих случаях очевидна [127]. Для малых КА выбор типа исполнительных органов системы управления является не тривиальной задачей. Между областями применения перечисленных устройств нельзя провести резких границ. Динамические требования к системе управления, включающей в свой состав гиросистему, во многом определяются множеством требуемых значений кинетического момента H_T . Множество H_T является областью изменения в связанной с КА системе координат вектора суммарного кинетического момента создаваемого гиросистемой. Изменение этого вектора в указанной области в соответствии с реализуемыми в системе законами должно обеспечивать требуемое управление параметрами углового движения КА. Естественно множество H_T должно содержаться внутри множества максимальных значений кинетического момента H_C , реализуемых

гиросистемой.

Таким образом, для всех вариантов построения гиросистемы должно быть обеспечено выполнение условия:

$$H_T \subset H_C. \quad (6.1)$$

При выполнении условия (6.1) можно утверждать, что величина суммарного кинетического момента, создаваемого гиросистемой будет достаточна, для обеспечения требуемой угловой скорости вращения КА.

6.1 Реализация программных разворотов с помощью системы двигателей-маховиков

В данном разделе в качестве гиросистемы рассматривается комплекс управляющих двигателей – маховиков. Область вариации возможных значений суммарного кинетического момента H_C , создаваемого системой зависит от количества маховиков в системе, схемы их расположения относительно жестко связанной с КА системы координат и максимального значения кинетического момента, реализуемого каждым из маховиков.

Суммарный кинетический момент маховиков выражается формулой

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^n h_k \mathbf{g}_k, \quad (6.2)$$

где h_k – алгебраическое значение кинетического момента маховика с номером k , $k = \overline{1, n}$, $\mathbf{g}_k$ – орт оси вращения маховика с номером k , n – общее количество маховиков в системе. Здесь и далее считаем, что система всегда состоит из одинаковых маховиков. В этом случае $-h_{\max} \leq h_k \leq h_{\max}$, где $h_{\max}$ – абсолютная величина предельного значения кинетического момента отдельного маховика. Величина $h_{\max}$ – один из параметров системы.

Расположение системы маховиков будем рассматривать относительно связанной с КА системы координат $Ox_1x_2x_3$ в которой вектор $\mathbf{H}$ представлен

своими компонентами H_i , $i = \overline{1,3}$. Ниже, если не оговорено особо, компоненты всех векторов и координаты точек относятся к системе $Ox_1x_2x_3$. Рассмотрим область P_n пространства $R^3(H_1, H_2, H_3)$, заполняемую концами векторов (6.2) (начала векторов помещены в точку O). Чтобы обеспечить полную ориентацию КА на нем должно быть установлено не менее трех маховиков [49], орты осей вращения которых линейно независимы. В этом случае область P_n представляет собой выпуклый многогранник, обладающий центральной симметрией относительно точки O , у которого $n(n-1)$ граней, $2n(n-1)$ ребер и $n(n-1)+2$ вершин. В общем случае все грани такого многогранника являются параллелограммами, но если все маховики в системе одинаковые, то грани многогранника – ромбы, каждая сторона которого имеет длину $2h_{\max}$. Стороны каждого ромба параллельны каким-либо из ортов $\mathbf{g}_k$ и $\mathbf{g}_j$, площадь соответствующего ромба равна $4h_{\max}^2 (\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_j)$, где $k \neq j$, $j, k = \overline{1, n}$. При построении многогранника P_n , не ограничивая общности, будем использовать безразмерные параметры, а именно

$$\tilde{\mathbf{H}} = \sum_{k=1}^n \tilde{h}_k \mathbf{g}_k, \quad \tilde{h}_k = \frac{h_k}{h_{\max}}, \quad (6.3)$$

в этом случае $|\tilde{h}_k| \leq 1$. Выражение (6.3) для краткости будем записывать в виде $\tilde{\mathbf{H}} = [\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n]$. Рассмотрим схему расположения системы маховиков, называемую «четырёхугольная пирамида».

Система состоит из четырех двигателей – маховиков, оси вращения которых расположены параллельно боковым ребрам четырехгранной пирамиды. Высота пирамиды параллельна оси Ox_1 , линии пересечения граней пирамиды с плоскостью Ox_2x_3 параллельны или перпендикулярны осям Ox_2 , Ox_3 (рис. 6.1).

Орты $\mathbf{g}_k$, $k = \overline{1,4}$ имеют компоненты

$$\mathbf{g}_1 = (-d_1, d_2, -d_3)^T, \quad \mathbf{g}_2 = (-d_1, d_2, d_3)^T, \quad \mathbf{g}_3 = (d_1, d_2, -d_3)^T, \quad \mathbf{g}_4 = (d_1, d_2, d_3)^T,$$

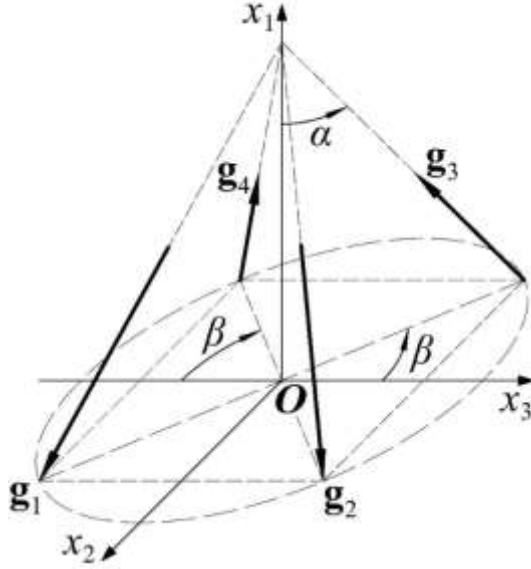


Рис. 6.1. Система двигателей-маховиков «четырёхугольная пирамида».

здесь $d_1 = \cos \alpha$, $d_2 = \sin \alpha \sin \beta$, $d_3 = \sin \alpha \cos \beta$, α – угол между осью Ox_1 и каждым из ортов $\mathbf{g}_k$, β – угол между осью Ox_3 и проекцией каждого из ортов $\mathbf{g}_k$ на плоскость Ox_2x_3 . Углы α и β – параметры системы. Основание пирамиды, лежащее в плоскости Ox_2x_3 представляет собой прямоугольник, а в случае $\beta = \pi/4$ – квадрат. Скалярная запись векторного выражения (6.3) имеет вид:

$$\tilde{H}_1 = (-\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3 + \tilde{h}_4)d_1, \quad \tilde{H}_2 = (\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3 + \tilde{h}_4)d_2, \quad (6.4)$$

$$\tilde{H}_3 = (-\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 - \tilde{h}_3 + \tilde{h}_4)d_3.$$

Область пространства, заполняемая концами векторов $\tilde{\mathbf{H}} = [\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3, \tilde{h}_4]$ представляет собой выпуклый многогранник P_4 , общий вид которого показан на рис. 6.2. Предельные значения $\tilde{\mathbf{H}} = \langle \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1 \rangle$ (кроме значений $\tilde{\mathbf{H}} = \langle -1, -1, -1, -1 \rangle = (0, 0, 0)^T$ и $\tilde{\mathbf{H}} = \langle 1, 1, 1, 1 \rangle = (0, 0, 0)^T$) реализуются в вершинах многогранника P_4 .

Рассмотрим случай, когда один из маховиков отключен (вышел из строя). Без ограничения общности можно считать, что отключен маховик с осью, параллельной орту $\mathbf{g}_4$. В этом случае скалярная запись векторного выражения

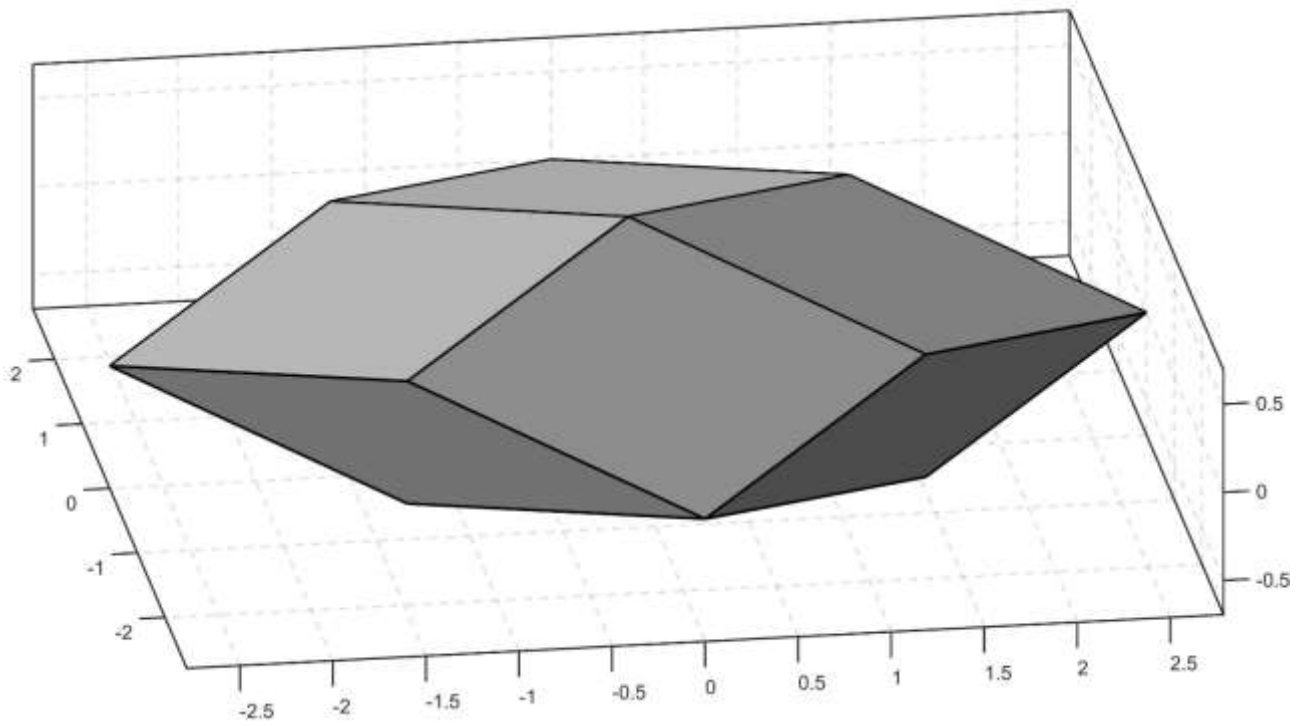


Рис. 6.2. Общий вид многогранника P_4 .

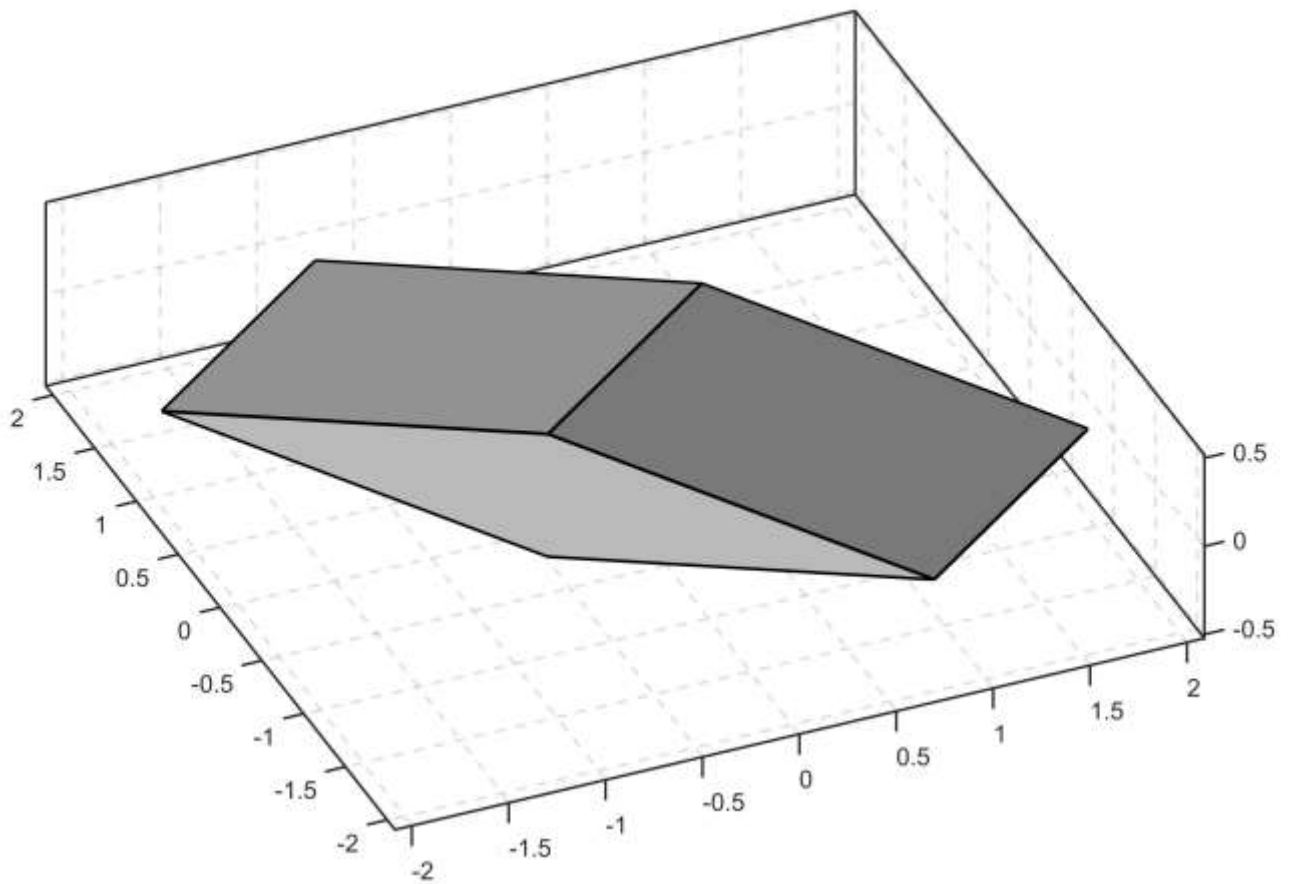


Рис. 6.3. Общий вид параллелепипеда P_3 .

(6.3) имеет вид:

$$\tilde{H}_1 = (-\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3)d_1, \quad \tilde{H}_2 = (\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3)d_2, \quad \tilde{H}_3 = (-\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 - \tilde{h}_3)d_3.$$

Область пространства, заполняемая концами векторов $\tilde{\mathbf{H}} = [\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3]$ представляет собой параллелепипед P_3 , общий которого показан на рис. 6.3.

Положение вершин V_i , $i = \overline{1,7}$ многогранника P_4 характеризуется соотношениями:

$$V_1 = (0, 4d_2, 0), \quad V_2 = (2d_1, 2d_2, 2d_3), \quad V_3 = (2d_1, 2d_2, -2d_3), \quad V_4 = (-2d_1, 2d_2, 2d_3), \\ V_5 = (-2d_1, 2d_2, -2d_3), \quad V_6 = (0, 0, -4d_3), \quad V_7 = (-4d_1, 0, 0).$$

Грани F_i , F'_i , $i = \overline{1,6}$ многогранника P_4 зададим как:

$$F_1 = \{V_1, V_4, V_7, V_5\}, \quad F_2 = \{V_4, V_6, V'_3, V_7\}, \quad F_3 = \{V_1, V_5, V_6, V_3\}, \\ F_4 = \{V_5, V_7, V'_2, V_6\}, \quad F_5 = \{V_1, V_3, V'_7, V_2\}, \quad F_6 = \{V_2, V'_6, V_4, V_1\}, \\ F'_1 = \{V'_1, V'_4, V'_7, V'_5\}, \quad F'_2 = \{V'_4, V_6, V_3, V'_7\}, \quad F'_3 = \{V'_1, V'_5, V'_6, V'_3\}, \\ F'_4 = \{V'_5, V'_7, V_2, V'_6\}, \quad F'_5 = \{V'_1, V'_3, V_7, V'_2\}, \quad F'_6 = \{V'_2, V'_6, V'_4, V'_1\}.$$

В случае отключения маховика с осью, параллельной орту $\mathbf{g}_4$ многогранник P_4 трансформируется в параллелепипед P_3 . Положение вершин V_i , $i = \overline{1,4}$ параллелепипеда характеризуется соотношениями:

$$V_1 = (-d_1, 3d_2, -d_3), \quad V_2 = (d_1, d_2, d_3), \quad V_3 = (d_1, d_2, -3d_3), \quad V_4 = (-3d_1, d_2, d_3).$$

Как всякий параллелепипед, P_3 имеет 6 граней, которые зададим в виде:

$$F_1 = \{V_1, V_2, V'_4, V_3\}, \quad F_2 = \{V_1, V_3, V'_2, V_4\}, \quad F_3 = \{V_1, V_4, V'_3, V_2\}, \\ F'_1 = \{V'_1, V'_2, V_4, V'_3\}, \quad F'_2 = \{V'_1, V'_3, V_2, V'_4\}, \quad F'_3 = \{V'_1, V'_4, V_3, V'_2\}.$$

Перейдем к рассмотрению области множества требуемых значений кинетического момента H_T . Полный кинетический момент КА можно представить в виде $\mathbf{K} = \hat{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}$, где $\hat{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции КА,

$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – абсолютная угловая скорость КА, $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$ – суммарный кинетический момент, создаваемый системой маховиков. При построении множества H_T необходимого для реализации эйлера разворота КА, будем считать, что $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ и $\mathbf{H}(0) = 0$, а также будем пренебрегать накоплением кинетического момента от внешних сил за время поворота КА. Тогда при любом допустимом направлении эйлеровой оси разворота мы имеем, что $\mathbf{H} = -\hat{I} |\boldsymbol{\omega}_{np}| \mathbf{e}$, или $H_i = -I_i \omega_{np} e_i$, $i = \overline{1,3}$. Здесь $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)^T$ – орт эйлеровой оси разворота КА, $\omega_{np} = |\boldsymbol{\omega}_{np}|$ – модуль требуемой (программной) угловой скорости поворота КА относительно орта $\mathbf{e}$. Откуда следует, что фигура множества H_T представляет собой эллипсоид

$$\left(\frac{H_1}{I_1}\right)^2 + \left(\frac{H_2}{I_2}\right)^2 + \left(\frac{H_3}{I_3}\right)^2 \leq \omega_{np}^2. \quad (6.5)$$

Как было сказано выше, чтобы система маховиков обеспечивала требования к динамике КА, должно выполняться условие (6.1). Проще всего проверить выполнение условия (6.1) можно построив области H_T и H_C в одной системе координат и в едином масштабе, как будет показано далее.

Рассмотрим космический аппарат – гиростат, геометрическая форма и массово-инерционные характеристики которого представлены в п. 1.3. Полагаем, что на КА используется система одинаковых маховиков, для каждого из которых значение $h_{\max} = 18 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Поскольку система управления ориентацией КА должна быть достаточно универсальной, естественно потребовать, чтобы максимальные абсолютные значения реализуемых ею угловых скоростей вращения КА $\omega_{i \max}$ вокруг каждой из осей Ox_i , $i = \overline{1,3}$ были одинаковы. Предположим, что $\mathbf{K} = 0$, тогда справедливо соотношение

$$\omega_{i \max} = -H_{i \max} / I_i, \quad (6.6)$$

где $H_{i \max}$ – максимальные абсолютные значения кинетического момента

реализуемого системой маховиков по каждой из осей Ox_i , $i = \overline{1,3}$, здесь и далее полагаем $H_{i \max} > 0$. Для системы четырех маховиков, расположенных по схеме «четырёхугольная пирамида» (рис. 6.1) значения $H_{i \max}$ определяются соотношениями (6.4):

$$H_{1 \max} = 4h_{\max} \cos \alpha, \quad H_{2 \max} = 4h_{\max} \sin \alpha \sin \beta, \quad H_{3 \max} = 4h_{\max} \sin \alpha \cos \beta.$$

Исходя из условия $\omega_{1 \max} = \omega_{2 \max} = \omega_{3 \max}$ и с учетом (6.6) зависимости определяющие значения углов α и β имеют вид:

$$\alpha = \arctg \left(\frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2}}{I_1} \right), \quad \beta = \arctg \left(\frac{I_2}{I_3} \right).$$

Тогда заданным значениям моментов инерции КА соответствуют значения углов $\alpha = 80.5^\circ$ и $\beta = 45.5^\circ$.

Если по какой-либо оси Ox_i , $i = \overline{1,3}$ реализуется отвечающее ей максимальное значение угловой скорости $\omega_{i \max}$, то компоненты угловой скорости по двум другим осям равны нулю. Значения $\omega_{i \max}$, $i = \overline{1,3}$ характеризуют предельные возможности каждой из рассматриваемых систем маховиков для разворотов КА вокруг его главных центральных осей инерции. При произвольном выборе направления вектора угловой скорости в системе $Ox_1x_2x_3$ максимальное значение модуля этого вектора будет меньше. Область допустимых значений угловой скорости КА представляет собой многогранник, получающийся из многогранника P_n преобразованием подобия, задаваемым формулами (6.6). Предельные значения угловых скоростей $\omega_{i \max}$, $i = \overline{1,3}$ реализуются в вершинах этого многогранника.

Еще одним из возможных условий расположения двигателей-маховиков на КА является условие максимально возможного объема многогранника P_n . Как показано в работе [124], для выполнения этого условия оси вращения всех маховиков системы должны быть расположены по боковым ребрам правильной

n -угольной пирамиды, угол между боковым ребром и высотой которой не зависит от числа маховиков n и равен $\arctg(\sqrt{2}) \approx 54.7^\circ$.

Как было написано выше, для того чтобы система маховиков обеспечивала требования к динамике КА должно выполняться условие (6.1), выполнение которого можно проверить, построив области H_T и H_C в одной системе координат и в едином масштабе. Чтобы соответствующим образом отобразить эллипсоид H_T в системе координат $Ox_1x_2x_3$ необходимо уравнение (6.5) представить в безразмерном виде:

$$\frac{x_1^2}{l_1^2} + \frac{x_2^2}{l_2^2} + \frac{x_3^2}{l_3^2} = 1, \quad l_i = \frac{I_i \omega_{\max}}{h_{\max}}, \quad (6.7)$$

где l_i – полуоси эллипсоида H_T , $i = \overline{1,3}$. Таким образом, зная значения I_i и $h_{\max}$ можно определить максимальное значение реализуемой угловой скорости программных разворотов КА $\omega_{\max}$ относительно произвольной выбранной оси (или наоборот, зная значение $\omega_{\max}$ можно выбрать значение $h_{\max}$), исходя из условия (6.1).

Примем значения параметров $h_{\max} = 18 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $\alpha = 80.5^\circ$ и $\beta = 45.5^\circ$. Для варианта расположения маховиков «четырёхугольная пирамида» на рис. 6.4 (вверху) показан соответствующий многогранник P_4 , несколько граней которого изображены прозрачными. На этом же рисунке при значении $\omega_{\max} = 0.184^\circ/\text{с}$ показан эллипсоид H_T , касательный к некоторым граням многогранника P_4 , что соответствует выполнению условия (6.1). В качестве примера на рис. 6.4 (внизу) изображены многогранник P_4 и эллипсоид H_T для значения $\omega_{\max} = 0.190^\circ/\text{с}$, при котором эллипсоид выходит за грани многогранника. В случае отказа одного любого из маховиков выполнению условия (6.1) будет соответствовать значение $\omega_{\max} = 0.092^\circ/\text{с}$.

Аналогичным способом формулу (6.7) можно использовать чтобы определить максимальное значение реализуемого углового ускорения

программных разворотов КА $\varepsilon_{\max}$ относительно произвольной выбранной оси.

Для этого необходимо построить эллипсоид с полуосями $l_i = I_i \varepsilon_{\max} / m_{\max}$, $i = \overline{1,3}$,

где $m_{\max}$ – абсолютная величина предельного значения механического момента

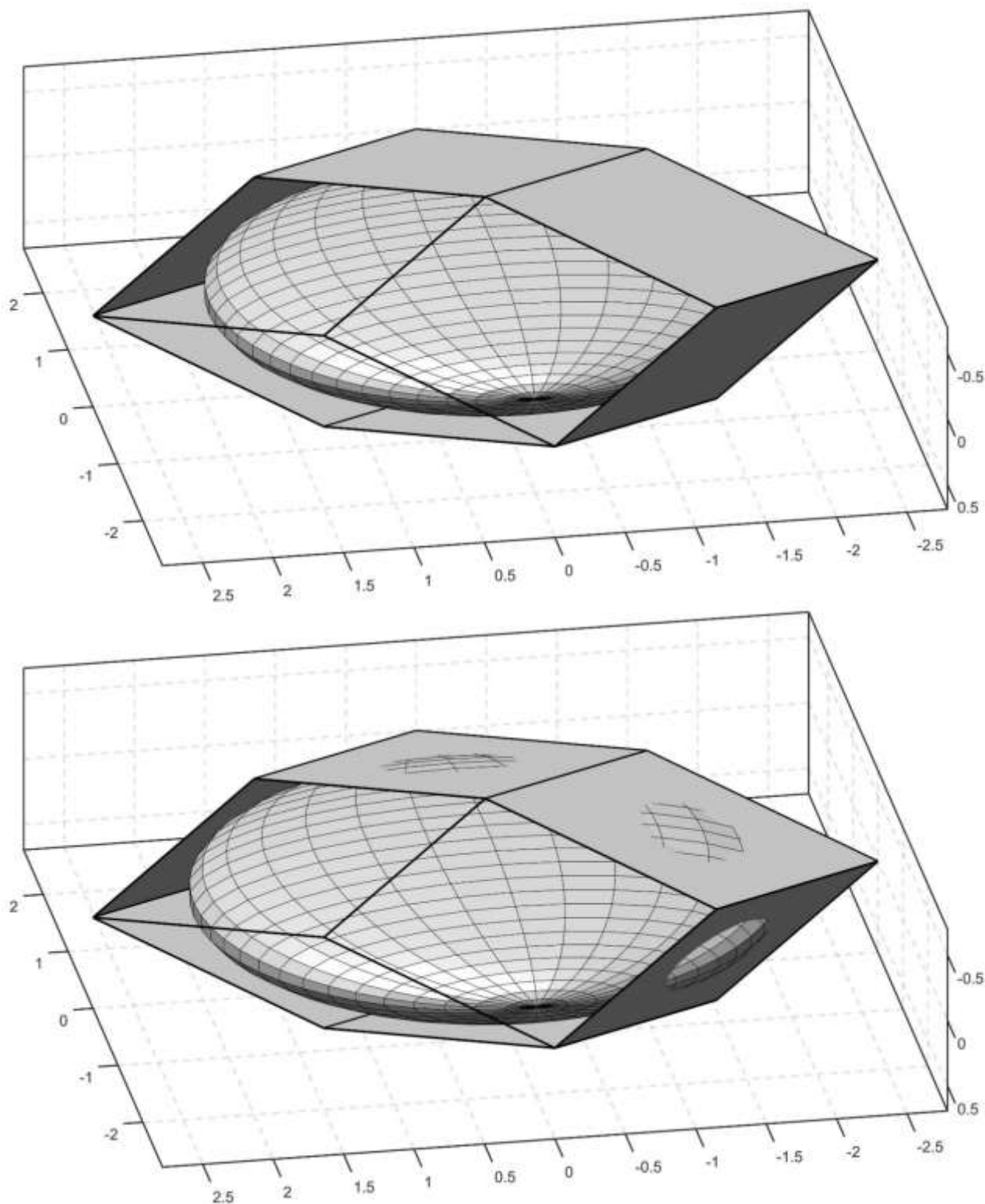


Рис. 6.4. Общий вид многогранника P_4 и эллипсоида H_T

(вверху при $\omega_{\max} = 0.184^\circ/\text{с}$, внизу при $\omega_{\max} = 0.190^\circ/\text{с}$).

отдельного маховика. Найденные указанным способом значения $\omega_{\max}$ и $\varepsilon_{\max}$ являются оценочными, поскольку не учитывают воздействие на КА внешних возмущающих моментов и физических характеристик самого маховика.

Для случая, когда гиросистема состоит из $n \geq 3$ маховиков уравнение (6.2) можно записать в виде

$$\mathbf{H} = D\mathbf{G} \quad (6.8)$$

где $D = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n)$ – прямоугольная матрица размерности $3 \times n$, $\mathbf{G} = (h_1, \dots, h_n)^T$. В случае $n > 3$ соотношение (6.8) нельзя единственным образом разрешить относительно величин h_k , $k = \overline{1, n}$. Для достижения единственности, потребуем, чтобы решение системы (6.8) относительно h_k имело минимальную евклидову норму:

$$\ell_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n h_k^2}.$$

Тогда

$$\mathbf{G} = D^+ \mathbf{H} \quad (6.9),$$

где $D^+ = D^T (DD^T)^{-1}$ – матрица, псевдообратная для матрицы D [169]. Матрица D^+ существует при условии, что в системе есть любые три маховика, у которых орты $\mathbf{g}_k$, $k = \overline{1, n}$, осей вращения линейно независимы. В случае $n = 3$ соотношения (6.8) разрешаются относительно h_k единственным образом, при этом в выражении (6.9) матрица $D^+ = D^{-1}$ также при условии, что все три орта $\mathbf{g}_k$ линейно независимы. Для варианта расположения маховиков по схеме «четырёхугольная пирамида» матрицы D и D^+ имеют вид

$$D = \begin{pmatrix} -d_1 & -d_1 & d_1 & d_1 \\ d_2 & d_2 & d_2 & d_2 \\ -d_3 & d_3 & -d_3 & d_3 \end{pmatrix}, \quad D^+ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -d_1^{-1} & d_2^{-1} & -d_3^{-1} \\ -d_1^{-1} & d_2^{-1} & d_3^{-1} \\ d_1^{-1} & d_2^{-1} & -d_3^{-1} \\ d_1^{-1} & d_2^{-1} & d_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

Еще одним из способов достижения единственности решения системы (6.8)

относительно h_k является требование минимума нормы

$$\ell_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq n} |h_k|.$$

Применение метода минимальной нормы ℓ_{∞} позволяет системе маховиков наиболее эффективно использовать весь возможный объем области H_C создаваемого кинетического момента [120]. Однако в отличие от решения с минимальной евклидовой нормой ℓ_2 , метод минимальной нормы ℓ_{∞} в общем случае представлен не в виде конечных формул, а как некоторый алгоритм поиска решения [120, 170, 171].

6.2 Поддержание орбитальной ориентации с помощью системы двигателей-маховиков

При использовании системы двигателей-маховиков одним из критериев эффективности ее функционирования является скорость накопления собственного кинетического момента. Эта скорость определяет промежутки времени между разгрузками системы маховиков и должна быть достаточно малой, чтобы обеспечить продолжительные отрезки невозмущенного полета КА.

Оценим возможности системы двигателей-маховиков при стабилизации КА в орбитальной системе координат $OX_1X_2X_3$. При поддержании неизменной ориентации КА в системе $OX_1X_2X_3$ кинетический момент маховиков должен изменяться в соответствии с уравнениями (4.1). При оценке накопленного кинетического момента маховиков будем считать, что орбита КА круговая радиуса r и неизменна в абсолютном пространстве. Тогда $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{E}_2$, $\mathbf{r} = r \mathbf{E}_3$, $\mathbf{v} = v \mathbf{E}_1$, где $v = |\mathbf{v}| = \omega_0 r$, $\omega_0 = \sqrt{\mu_E / r^3}$. С учетом указанных допущений уравнение, описывающее изменение кинетического момента системы маховиков можно представить в виде

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{H}}{dt} + \omega_0 \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H} = -\hat{I} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - \omega_0^2 (\mathbf{E}_2 \times \hat{I} \mathbf{E}_2) + 3\omega_0^2 (\mathbf{E}_3 \times \hat{I} \mathbf{E}_3) + p\mathbf{v}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{e}_1). \quad (6.10)$$

Учитывая, что мы рассматриваем именно стабилизацию КА, то первым слагаемым в правой части уравнения (6.10) можно пренебречь. Тогда уравнение (6.10) примет вид

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{H}}{dt} + \omega_0 \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H} = \omega_0^2 \left[3(\mathbf{E}_3 \times \hat{I} \mathbf{E}_3) - (\mathbf{E}_2 \times \hat{I} \mathbf{E}_2) \right] + p\mathbf{v}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{e}_1). \quad (6.11)$$

Рассмотрим режим стабилизации КА относительно орбитальной системы координат, при котором $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{E}_2$, а орты $\mathbf{e}_i$ совпадают с ортами $\pm \mathbf{E}_j$, $i, j = \overline{1, 3}$. Такая ориентация КА называется гравитационной и в данном случае, с учетом принятых допущений, она соответствует одному из положений равновесия (покоя) КА в орбитальной системе координат. Для определенности рассмотрим стабилизацию КА в окрестности неустойчивого положения (4.5). Линеаризуем уравнение (6.11) в окрестности положения (4.5), которому соответствуют значения углов $\psi = -\vartheta = \pi/2$, $\varphi = 0$. В проекциях на оси системы $Ox_1x_2x_3$, с учетом соотношений $\mathbf{E}_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})$, $i = \overline{1, 3}$, уравнение (6.11) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 + \omega_0 H_2 &= M_1, \quad \dot{H}_2 - \omega_0 H_1 = M_2, \quad \dot{H}_3 = M_3, \\ M_1 &= 4\omega_0^2 (I_2 - I_3) \tilde{\psi}, \quad M_2 = \left[\omega_0^2 (I_1 - I_3) + \pi R_c^2 \chi_c \rho_a v^2 \right] \varphi, \\ M_3 &= \left[3\omega_0^2 (I_1 - I_2) - \pi R_c^2 \chi_c \rho_a v^2 \right] \tilde{\vartheta}, \quad \tilde{\vartheta} = \vartheta + \pi/2, \quad \tilde{\psi} = \psi - \pi/2. \end{aligned} \quad (6.12)$$

При фиксированных значениях углов ψ , ϑ , φ внешние моменты $M_i = \text{const}$, и уравнения (6.12) легко проинтегрировать. Их решение с нулевыми начальными условиями имеет вид

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\omega_0} [M_1 \sin \omega_0 t - M_2 (1 - \cos \omega_0 t)], \quad H_2 = \frac{1}{\omega_0} [M_1 (1 - \cos \omega_0 t) + M_2 \sin \omega_0 t], \\ H_3 &= M_3 t. \end{aligned} \quad (6.13)$$

В данном случае значения $\tilde{\psi}$, $\tilde{\vartheta}$, φ фактически представляют собой точности стабилизации КА относительно положения (4.5) в соответствующем канале управления. Задав требуемые значения $\tilde{\psi}$, $\tilde{\vartheta}$, φ и продолжительность

поддержания заданной ориентации КА, по формулам (6.13) можно приближенно оценить величину накапливаемого собственного кинетического момента системы маховиков. Из выражения (6.13) получаем

$$|\mathbf{H}|^2 = \frac{2(1 - \cos \omega_0 t)}{\omega_0^2} (M_1^2 + M_2^2) + M_3^2 t^2.$$

Из последних соотношений следует, что накопление составляющих H_1 , H_2 кинетического момента системы маховиков носит циклический характер и ограничено величинами

$$H_{1\max} = \frac{1}{\omega_0} (|M_2| + \sqrt{M_1^2 + M_2^2}), \quad H_{2\max} = \frac{1}{\omega_0} (|M_1| + \sqrt{M_1^2 + M_2^2}),$$

а составляющая H_3 неограниченно возрастает с течением времени.

Приведенные выше соотношения позволяют определить требования к системе маховиков, обеспечивающие реализацию режима стабилизации КА в орбитальной системе координат в окрестности положения (4.5). Необходимость их определения возникает, как правило, только при отсутствии в программе функционирования КА режимов программных разворотов, имеющих более высокие требования к множеству возможных значений суммарного кинетического момента, создаваемого маховиками.

Если основным режимом функционирования КА является его гравитационная ориентация в окрестности положения (4.5), то значения углов α и β можно выбирать следующим образом.

Рассмотрим систему четырех маховиков, расположенных по схеме «четырёхугольная пирамида» и представим компоненты вектора $\mathbf{G}$, определяемого уравнением (6.9), в виде функций $h_k(\alpha, \beta)$, $k = \overline{1, 4}$. В области $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$ найдем значения углов α и β , при которых функция

$$f(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{k=1}^4 h_k^2(\alpha, \beta)} \quad (6.14)$$

будет иметь минимум. В указанной области функция (6.14) является непрерывно дифференцируемой. Положим, что $H_i = H_{i\max} = \text{const} > 0$, $i = \overline{1, 3}$ тогда

минимум функции (6.14) достигается при

$$\alpha_{\min} = \operatorname{arctg} \left(\sqrt[4]{\left(\frac{H_{2\max}}{H_{1\max} \sin \beta_{\min}} \right)^2 + \left(\frac{H_{3\max}}{H_{1\max} \cos \beta_{\min}} \right)^2} \right) = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{H_{2\max} + H_{3\max}}{H_{1\max}}} \right), \quad (6.15)$$

$$\beta_{\min} = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{H_{2\max}}{H_{3\max}}} \right).$$

На рис. 6.5 приведен график зависимости углов $\alpha_{\min}$ и $\beta_{\min}$ от $H_{3\max}/H_{2\max}$ при условии, что $H_{1\max} = H_{2\max}$.

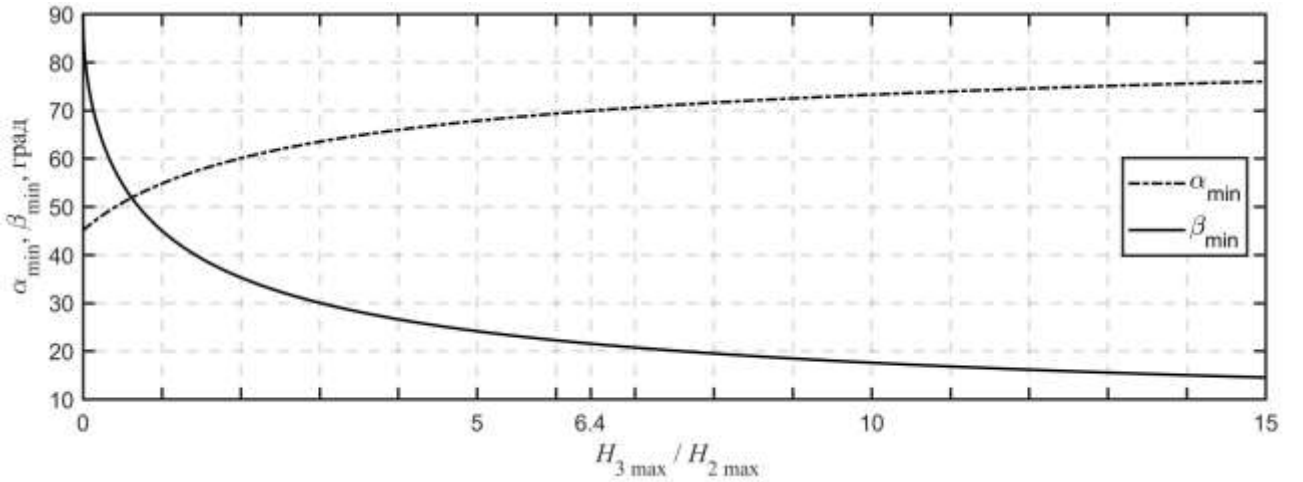


Рис. 6.5. Зависимость величин $\alpha_{\min}$, $\beta_{\min}$ от $H_{3\max}/H_{2\max}$, при $H_{1\max} = H_{2\max}$.

В самом общем случае, если имеется система из n маховиков, орты осей вращения которых расположены вдоль боковых ребер правильной n -угольной пирамиды, то минимум функции

$$f(\gamma) = \sqrt{\sum_{k=1}^n h_k^2(\gamma)},$$

на интервале $0 < \gamma < \pi/2$ достигается при

$$\gamma_{\min} = \operatorname{arctg} \left(\sqrt[4]{\frac{2H_{2\max}^2 + 2H_{3\max}^2}{H_{1\max}^2}} \right).$$

Здесь γ – угол между боковым ребром и высотой правильной n -угольной пирамиды. В случае, когда $H_{1\max} = H_{2\max} = H_{3\max}$, значение угла $\gamma_{\min} = \arctg(\sqrt{2}) \approx 54.7^\circ$, при котором соответствующий многогранник P_n системы маховиков будет иметь максимальный объем.

Используя формулы (6.13), можно получить лишь весьма приблизительную оценку величины накапливаемого собственного кинетического момента системы маховиков. Более точные значения $H_{i\max}$, используемые для расчета значений углов $\alpha_{\min}$ и $\beta_{\min}$, можно получить в результате численного моделирования уравнений движения КА.

В качестве примера численного моделирования рассмотрим стабилизацию КА в орбитальной системе координат в окрестности положения (4.5). Для стабилизации КА используется система из четырех маховиков, расположенных по схеме «четыреугольная пирамида».

Уравнения движения КА состоят из двух подсистем (см. п. 1.3). Подсистему уравнений углового движения КА (1.8), (4.1) необходимо дополнить уравнением (4.2). Скорость накопления кинетического момента маховиков во многом определяется видом и параметрами выбранного закона управления угловым движением КА. В данном случае используем в качестве закона управления тривиальный пропорционально-дифференцирующий регулятор. Выражение для $\mathbf{M}_c$ запишем в виде

$$\mathbf{M}_c = \xi^2 \hat{I}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{e}_3) - 2\xi \hat{I}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2), \quad (6.16)$$

где ξ – положительный параметр (см. (4.19)).

Моделирование режима орбитальной ориентации КА в окрестности положения (4.5) сводилось к численному интегрированию системы (1.8), (4.1), (4.2), (6.16) с использованием соотношений (6.8), (6.9). В данной главе при численном интегрировании уравнений движения центра масс КА в качестве начальных условий использовались параметры **Орбиты II**. Начальные условия системы (1.8), (4.1), (4.2), (6.16): $\psi(0) = -\vartheta(0) = \pi/2$, $\varphi(0) = 0$, $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$

, $\omega_3(0) = -\omega_0$, $\mathbf{H}(0) = 0$. Параметры КА приведены в п. 1.3, значения $\xi = 0.0025 \text{ с}^{-1}$, $\omega_0 = 0.001125 \text{ с}^{-1}$. Результаты расчетов движения КА, полученные в рамках принятой модели на интервале времени 5 суток, приведены на рис. 6.6 – 6.9. На рис. 6.6 представлены графики зависимости от времени углов ориентации КА, из которых видно, что закон управления (6.16) обеспечивает стабилизацию КА в окрестности положения (4.5) с погрешностями по углам ψ , θ , ϕ не более $\pm 0.005^\circ$, $\pm 0.5^\circ$, $\pm 0.05^\circ$ соответственно. Амплитуды установившихся колебаний компонентов вектора абсолютной угловой скорости КА ограничены значениями:

$$|\omega_1| < 6 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ/\text{с}, |\omega_2| < 6 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ/\text{с}, |\omega_3 + \omega_0| < 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ/\text{с}.$$

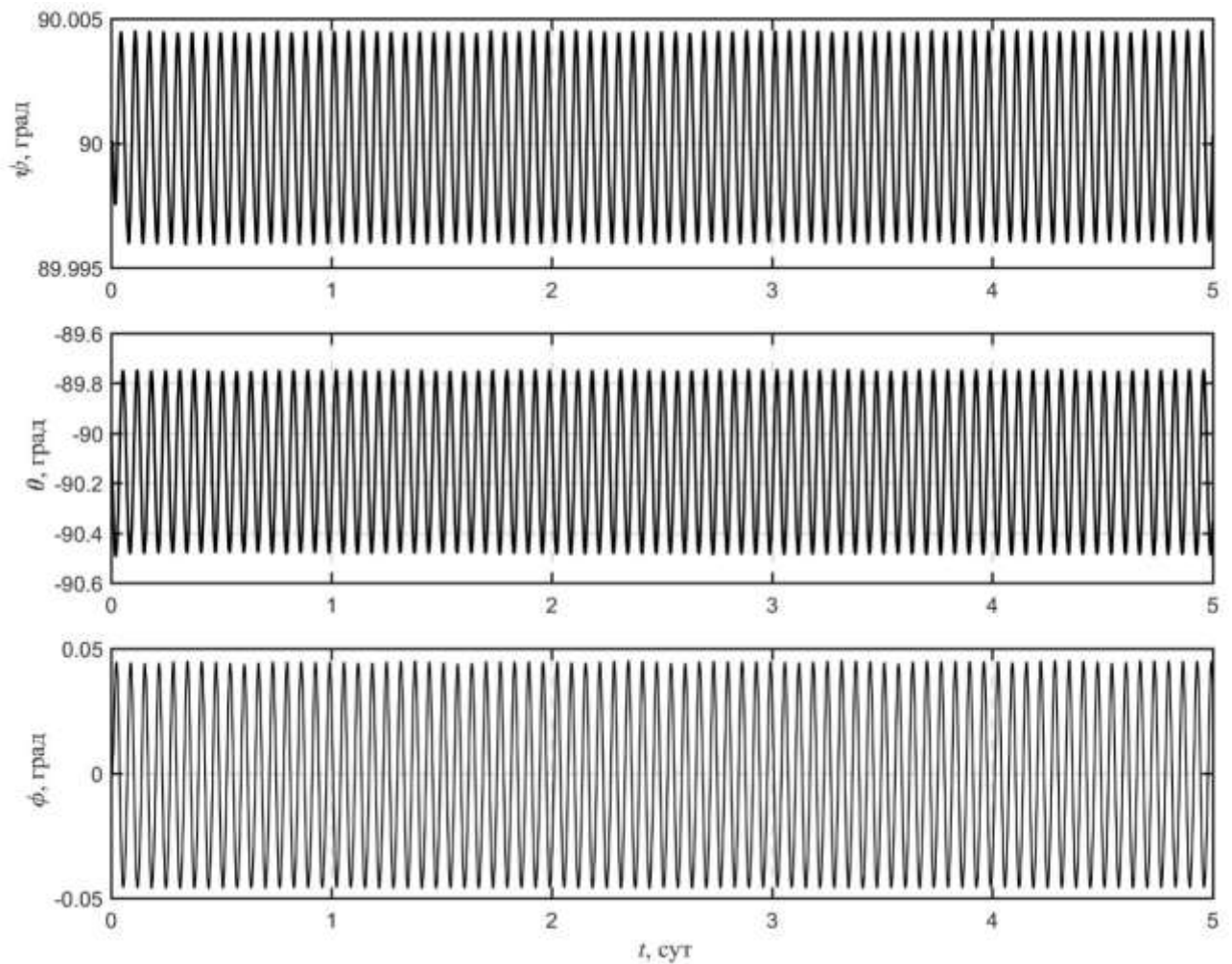


Рис. 6.6. Углы ориентации КА.

На рис. 6.7 представлены графики зависимости от времени компонентов вектора собственного кинетического момента системы маховиков H_i , $i = \overline{1,3}$, которые на момент окончания моделирования достигли значений

$$H_{1\max} = H_{2\max} = 4.6 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad H_{3\max} = 29 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}. \quad (6.17)$$

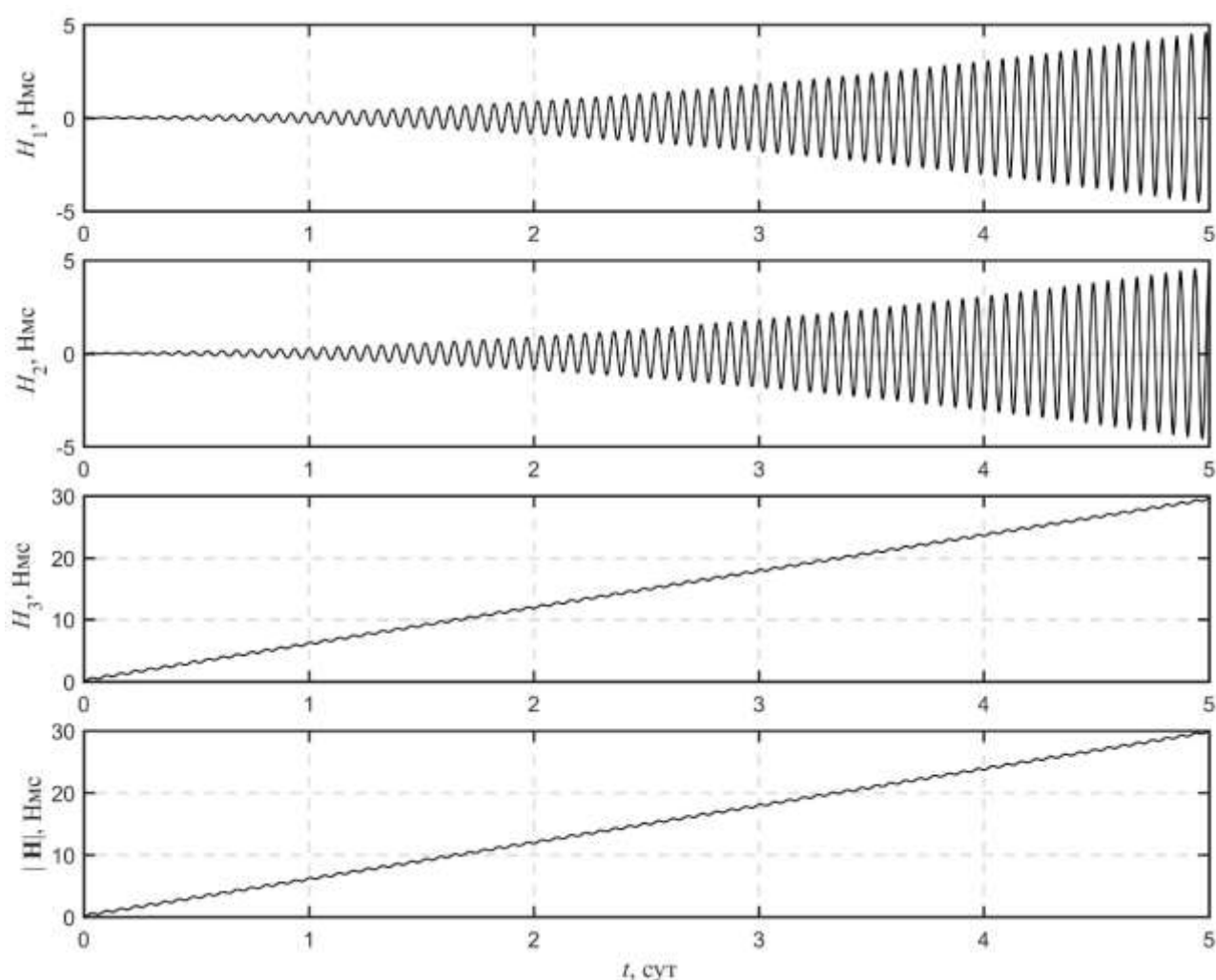


Рис. 6.7. Составляющие суммарного кинетического момента системы маховиков.

Величина H_3 возрастает на всем интервале времени моделирования, что соответствует третьему уравнению (6.13). На графиках величин H_1 , H_2 виден медленное (по сравнению с возрастанием H_3), но постоянное увеличение амплитуд их колебаний относительно средних значений $H_1 = 0$ и $H_2 = 0$ соответственно. Это вызвано в первую очередь влиянием атмосферы, которое

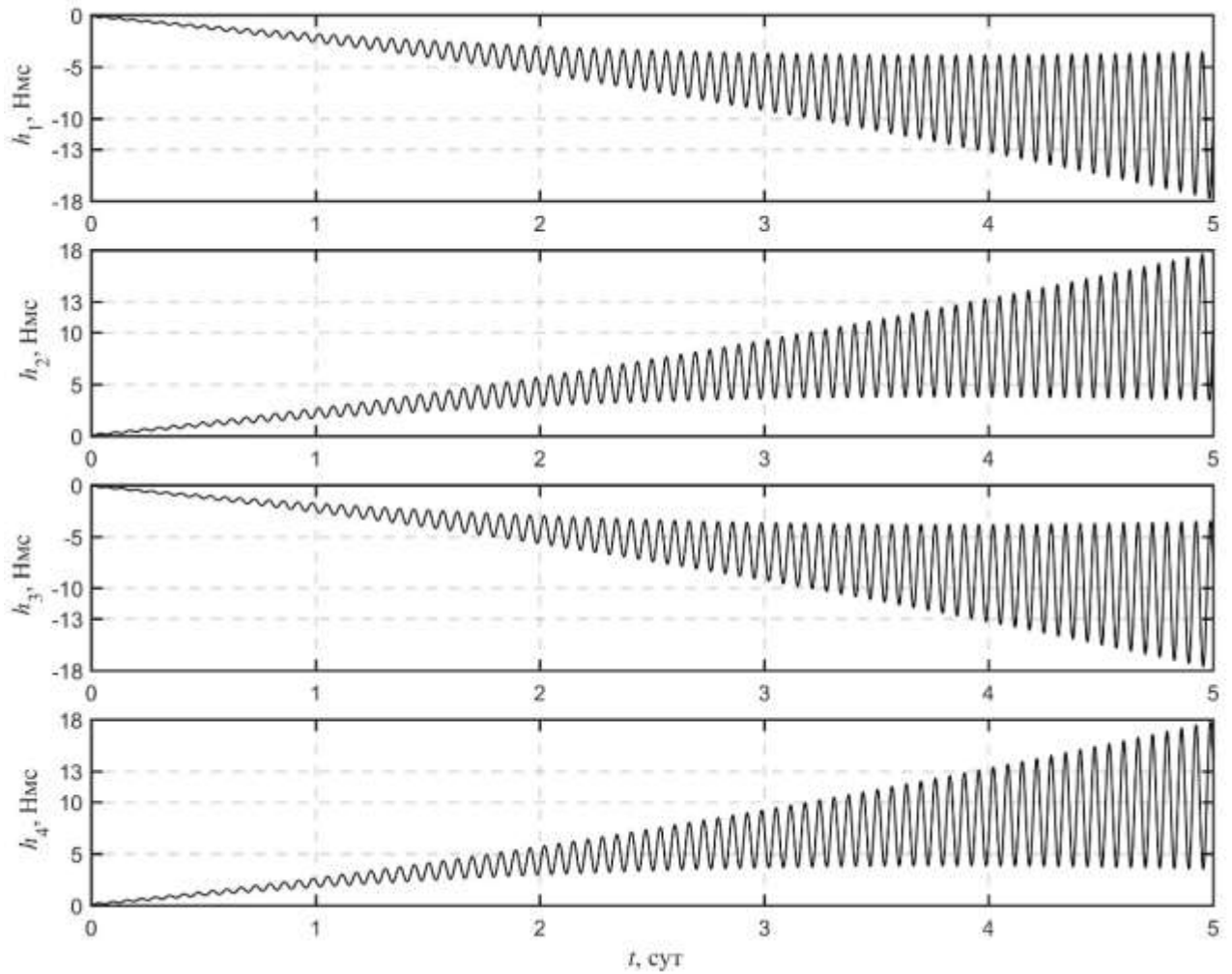


Рис. 6.8. Собственные кинетические моменты маховиков
 $(\alpha = 80.5^\circ, \beta = 45.5^\circ)$.

при моделировании движения КА учитывается более точно, чем в случае уравнений (6.12). Частота колебаний значений углов ψ , ϑ , φ , компонентов угловой скорости и H_i , $i = \overline{1,3}$, равна ω_0 . На рис. 6.8 представлены графики зависимости от времени собственных кинетических моментов маховиков h_k , $k = \overline{1,4}$, в случае, когда значения углов $\alpha = 80.5^\circ$ и $\beta = 45.5^\circ$. На представленных графиках видно, что на момент окончания моделирования кинетический момент каждого из маховиков практически достиг своего предельного значения $h_{\max} = 18 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, после превышения которого маховик утратит возможность создавать необходимый управляющий момент для поддержания заданной ориентации КА. Воспользуемся уравнениями (6.15),

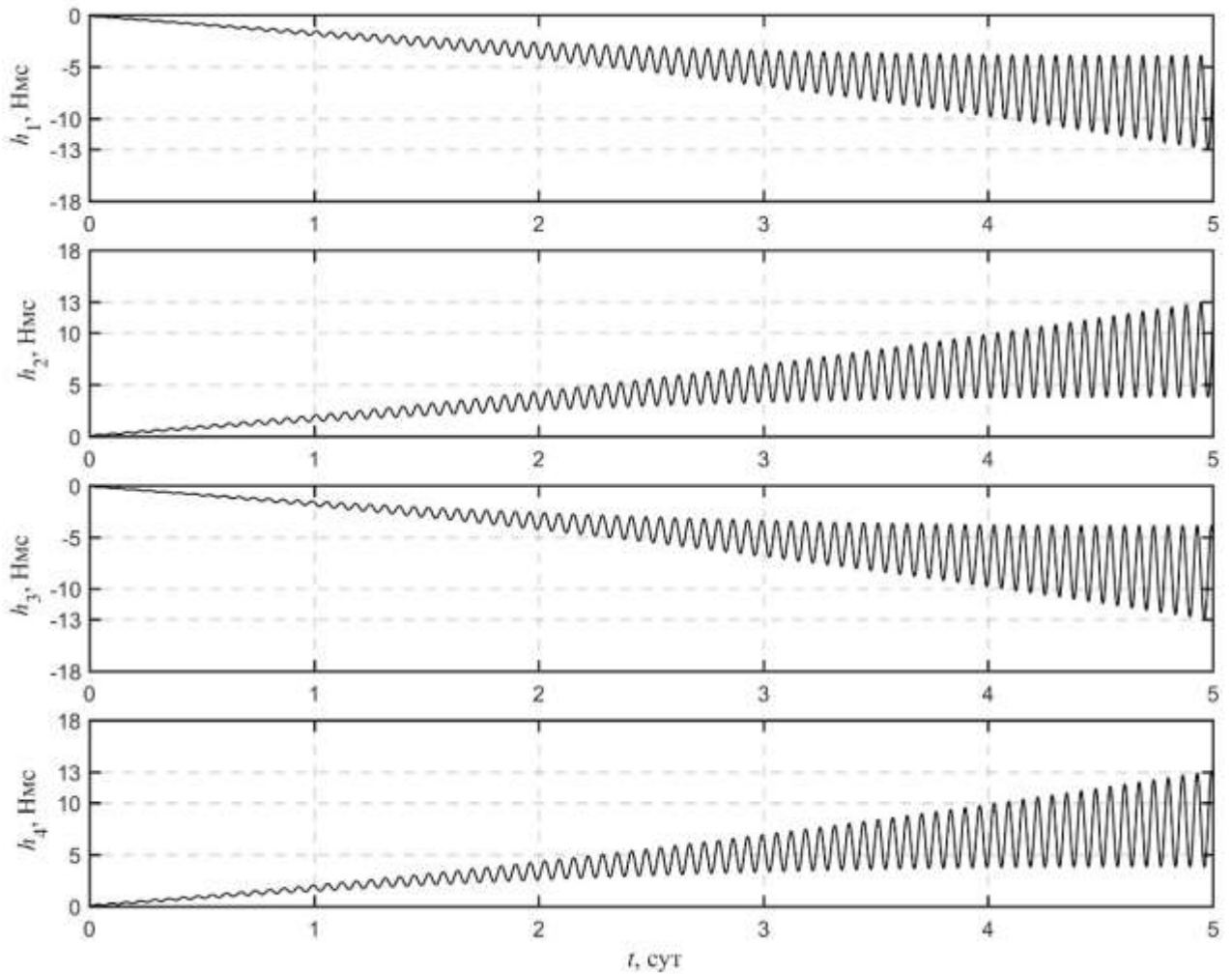


Рис. 6.9. Собственные кинетические моменты маховиков
($\alpha = 70.0^\circ$ и $\beta = 21.5^\circ$).

использовав полученные значения (6.17), и вычислим значения углов $\alpha_{\min} = 70.0^\circ$ и $\beta_{\min} = 21.5^\circ$. Поскольку в данном случае $H_{1\max} = H_{2\max}$, то значения углов $\alpha_{\min}$, $\beta_{\min}$ представлены на графике рис. 6.5 при $H_{3\max}/H_{2\max} \approx 6.4$. На рис. 6.9 приведены графики зависимости от времени величин маховиков h_k , $k = \overline{1,4}$, при значении углов $\alpha = \alpha_{\min} = 70.0^\circ$ и $\beta = \beta_{\min} = 21.5^\circ$. На представленных графиках видно, что использование значений углов $\alpha = \alpha_{\min}$, $\beta = \beta_{\min}$ позволило уменьшить амплитуду колебаний величин h_k , $k = \overline{1,4}$ маховиков на момент окончания моделирования примерно в 1.4 раза по сравнению с аналогичными графиками на рис. 6.8. Это дает

возможность увеличить продолжительность стабилизации КА относительно положения (4.5) до момента насыщения какого-либо из маховиков примерно на 31 час. Кроме того, уменьшение амплитуды колебаний величин h_k снижает потребление электроэнергии двигателем привода каждого маховика за счет уменьшения величины создаваемого им механического момента. На рис. 6.10 для значений (6.17) приведен график функции (6.14), его сечение плоскостью $\beta = \beta_{\min} = 21.5^\circ$ и показано значение $f(\alpha_{\min}, \beta_{\min}) = 19.4 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

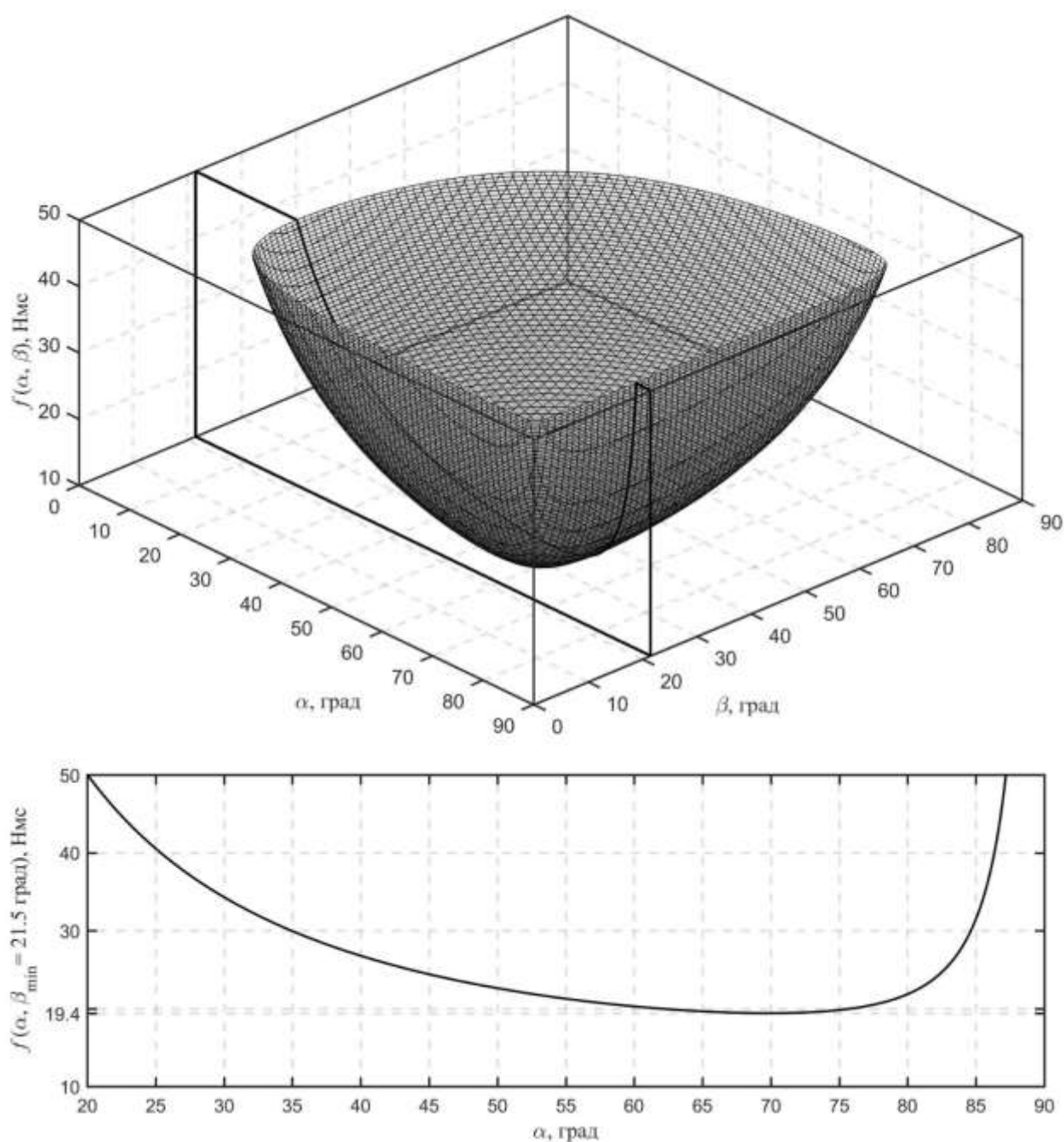


Рис. 6.10. Функция $f(\alpha, \beta)$.

6.3 Поддержание солнечной ориентации с помощью системы двигателей-маховиков

Рассмотрим режим солнечной ориентации КА описанный в п. 5.1.3 и реализуемый с помощью системы двигателей-маховиков. На основании результатов моделирования движения КА приведенных в п. 5.1.3 можно утверждать, что случай движения КА по **Орбите I (b)** (см. п. 1.4) является самым неблагоприятным с точки зрения накопления гиросtatического момента гиросистемы, когда величина $|\mathbf{H}|$ достигает наибольшего значения для всех возможных положений Солнца относительно рассматриваемой орбиты КА. Поэтому, если подобрать такие параметры системы двигателей-маховиков, которые позволят реализовать угловое движение КА в указанном выше случае без проведения разгрузки гиросtatического момента, то во всех остальных случаях разгрузка тем более не понадобится. То есть выбранные параметры системы маховиков обеспечат непрерывную солнечную ориентацию КА ($\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$) в течение длительных интервалов времени при любом положении Солнца относительно рассматриваемой орбиты.

В этом случае систему маховиков «четырёхугольная пирамида», рассмотренную в п. 6.1, расположим относительно осей системы $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы высота пирамиды была параллельна оси Ox_2 , линии пересечения граней пирамиды с плоскостью Ox_1x_3 параллельны или перпендикулярны осям Ox_1 , Ox_3 . Таким образом, пирамида, показанная на рис. 6.1, повернется на угол 90° против хода часовой стрелки вокруг оси Ox_3 , если смотреть с ее конца. По-прежнему, все маховики в системе считаем одинаковыми, $h_{\max} = 18 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Орты $\mathbf{g}_k$, $k = \overline{1,4}$ будут иметь компоненты

$$\mathbf{g}_1 = (-d_2, -d_1, -d_3)^T, \mathbf{g}_2 = (-d_2, -d_1, d_3)^T, \mathbf{g}_3 = (-d_2, d_1, -d_3)^T, \mathbf{g}_4 = (-d_2, d_1, d_3)^T.$$

Соответствующим образом изменится вид соотношений (6.4), координаты вершин V_i , $i = \overline{1,7}$ многогранника P_4 , а также элементы матриц D и D^+ в

соотношениях (6.8), (6.9).

В любом случае система двигателей-маховиков должна обеспечивать выполнение условия (6.1). Множество H_T в данном случае задается множеством значений гиросtatического момента $\mathbf{H}$ системы маховиков, реализуемого в процессе поддержания режима солнечной ориентации КА (см. рис. 5.12). На рис. 6.11 представлен соответствующий годограф вектора $\mathbf{H}$ (кривые линии черного цвета), а также показана аппроксимация области его вариации частью прямого эллиптического цилиндра.

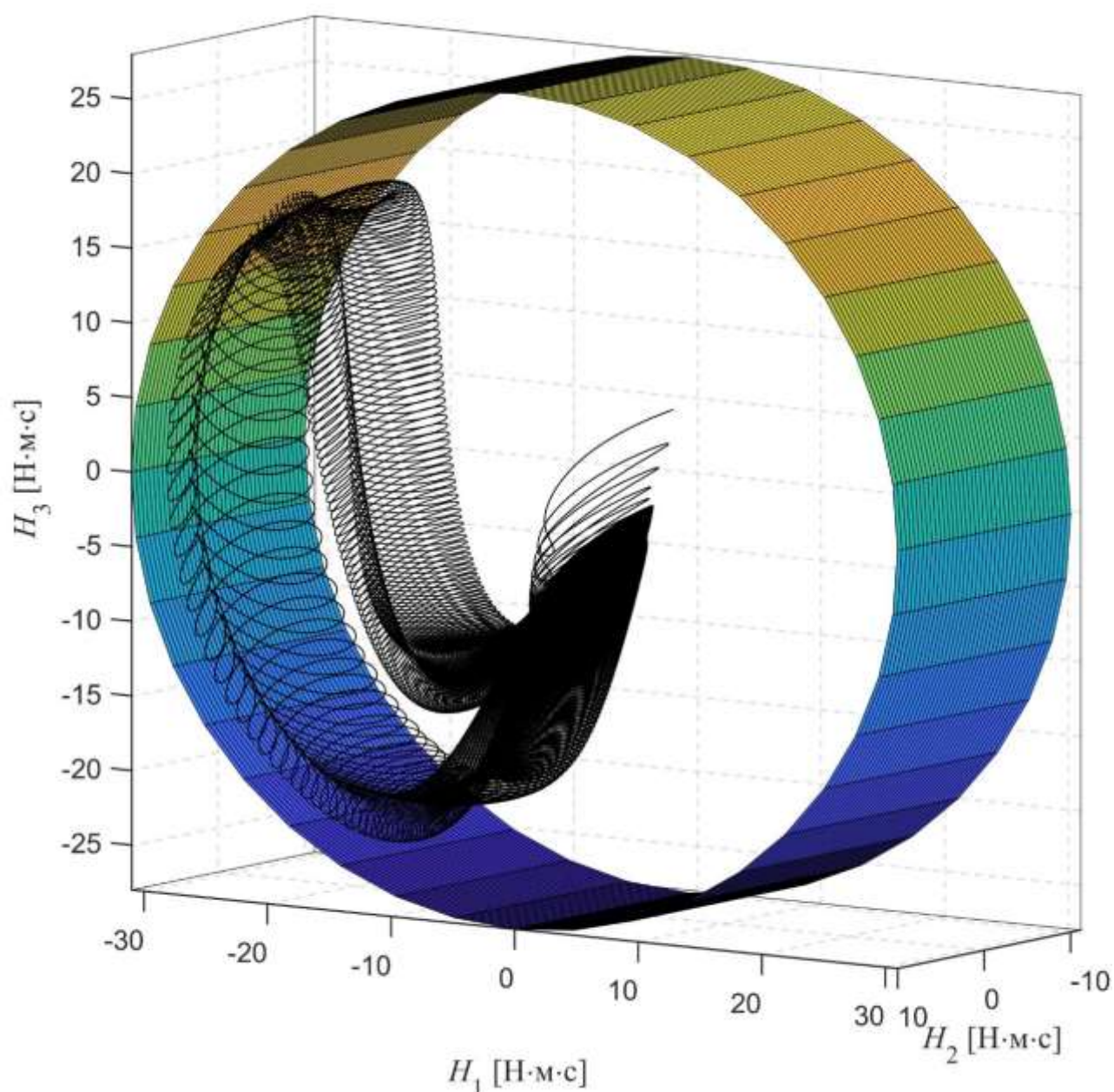


Рис. 6.11. Годограф $\mathbf{H}$ и аппроксимирующий цилиндр.

Зная значение $h_{\max}$, для построения многогранника P_4 остается только выбрать значения α и β параметров системы маховиков. Как было сказано выше, при выборе значений параметров α и β можно использовать разные критерии, из которых самый очевидный - это максимальный объем многогранника P_4 . Рассмотрим все возможные расстояния от каждой из граней P_4 до точки O . Эти расстояния, по сути, представляют собой абсолютные значения кинетического момента, реализуемого системой маховиков в направлении перпендикулярном соответствующей грани. Для схемы маховиков «четырёхугольная пирамида» все грани многогранника P_4 можно условно разделить на 3 группы в зависимости от их удаленности от его геометрического центра. Соответствующие значения H_I , H_{II} , H_{III} кинетического момента реализуемого системой маховиков в направлении от точки O по нормали к какой-либо грани принадлежащей своей группе можно вычислить по одной из следующих формул

$$H_I = \frac{2h_{\max} \sin 2\alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}}, \quad H_{II} = \frac{2h_{\max} \sin 2\alpha \cos \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}}, \quad H_{III} = 2h_{\max} \sin \alpha \sin 2\beta.$$

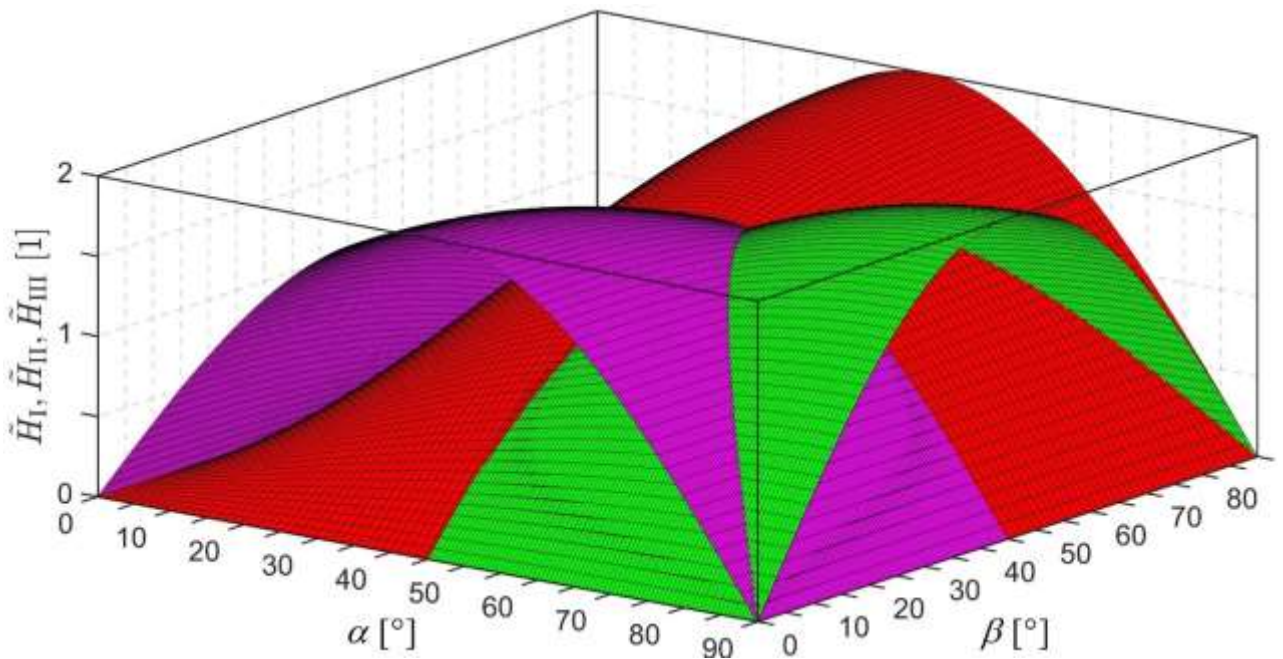


Рис. 6.12. Пересечение поверхностей $\tilde{H}_I(\alpha, \beta)$, $\tilde{H}_{II}(\alpha, \beta)$, $\tilde{H}_{III}(\alpha, \beta)$.

Наименьшее из значений H_I , H_{II} , H_{III} соответствует максимальному радиусу сферы, полностью вписанной в многогранник P_4 . На рис. 6.12 представлены три поверхности: $\tilde{H}_I(\alpha, \beta) = H_I / h_{\max}$ (показана красным цветом), $\tilde{H}_{II}(\alpha, \beta) = H_{II} / h_{\max}$ (показана фиолетовым цветом) и $\tilde{H}_{III}(\alpha, \beta) = H_{III} / h_{\max}$ (показана зеленым цветом). Поверхности имеют одну точку пересечения, соответствующую значениям углов $\alpha = \arctg(\sqrt{2}) \approx 54.7^\circ$ и $\beta = 45^\circ$ (рис. 6.13), при которых максимальный радиус сферы полностью вписанной в многогранник P_4 , а также объем P_4 , будут иметь наибольшее значение, равное $H_I = H_{II} = H_{III} = 4h_{\max} / \sqrt{6}$.

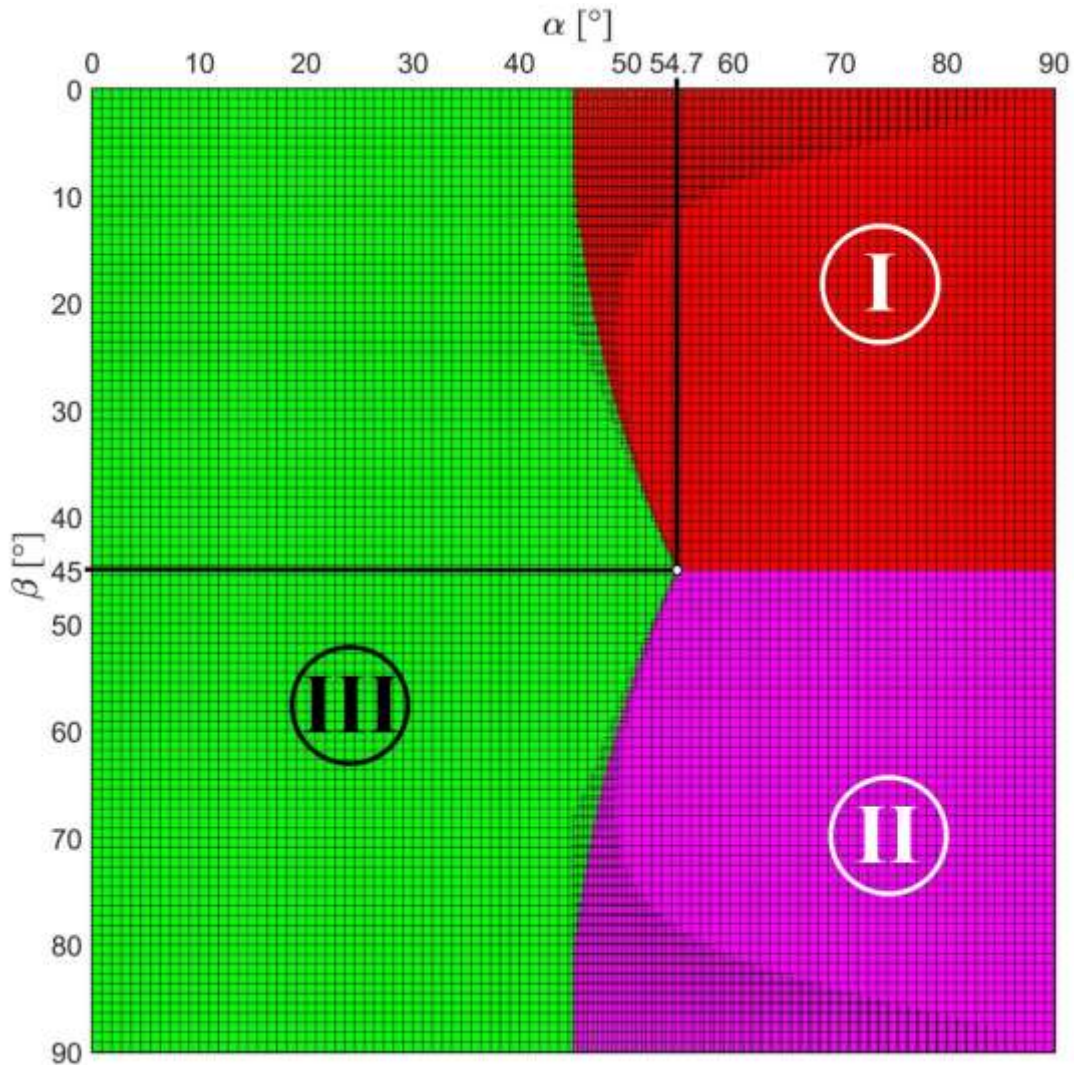


Рис. 6.13. Вид снизу на пересечение поверхностей

$$\tilde{H}_I(\alpha, \beta), \tilde{H}_{II}(\alpha, \beta), \tilde{H}_{III}(\alpha, \beta).$$

Еще один из способов выбрать значения углов α и β - это разместить аппроксимирующий цилиндр изображенный на рис. 6.11 внутри многогранника P_4 таким образом, чтобы кратчайшие расстояния $\delta_I, \delta_{II}, \delta_{III}$ от поверхности цилиндра до каждой из трех групп граней образующих P_4 были равны между собой. На рис. 6.14 схематично показано взаимное расположение проекций цилиндра и граней многогранника на координатные плоскости системы $Ox_1x_2x_3$. Значения $\delta_I, \delta_{II}, \delta_{III}$ вычисляются по формулам:

$$\delta_I = \frac{d_2L_2 + d_1L_1 - 4h_{\max}d_1d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}, \quad \delta_{II} = \frac{d_3L_2 + d_1L_3 - 4h_{\max}d_1d_3}{\sqrt{d_1^2 + d_3^2}},$$

$$\delta_{III} = \frac{d_3\tilde{L}_1 + d_2\tilde{L}_3 - 4h_{\max}d_2d_3}{\sqrt{d_2^2 + d_3^2}}, \quad \tilde{L}_1 = \frac{d_3L_1^2}{\sqrt{d_3^2L_1^2 + d_2^2L_3^2}}, \quad \tilde{L}_3 = \frac{d_2L_3^2}{\sqrt{d_3^2L_1^2 + d_2^2L_3^2}}.$$

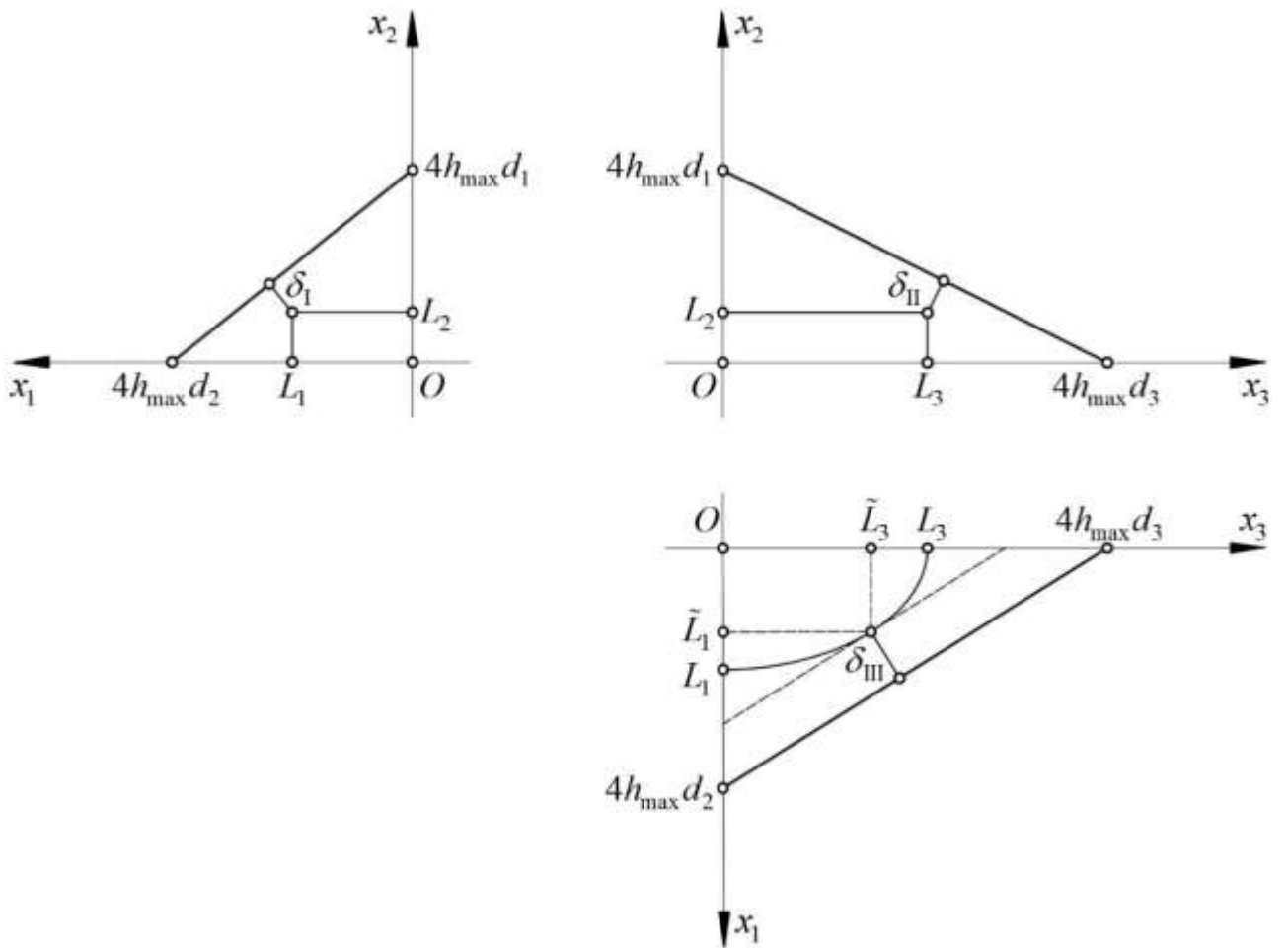


Рис. 6.14. Проекции цилиндра и граней многогранника на координатные плоскости системы $Ox_1x_2x_3$.

Здесь $L_2 = 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ – половина высоты цилиндра, $L_1 = 31 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ и $L_3 = 28 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ – значения полуосей эллипса, образованного пересечением цилиндра с плоскостью Ox_1x_3 , $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_3$ – координаты точки соприкосновения эллипса с касательной, параллельной прямой, образованной пересечением грани многогранника и плоскостью Ox_1x_3 .

При выполнении условий

$$\frac{L_2}{4d_1} + \frac{L_1}{4d_2} < h_{\max}, \quad \frac{L_2}{4d_1} + \frac{L_3}{4d_3} < h_{\max}, \quad \frac{\tilde{L}_1}{4d_2} + \frac{\tilde{L}_3}{4d_3} < h_{\max}$$

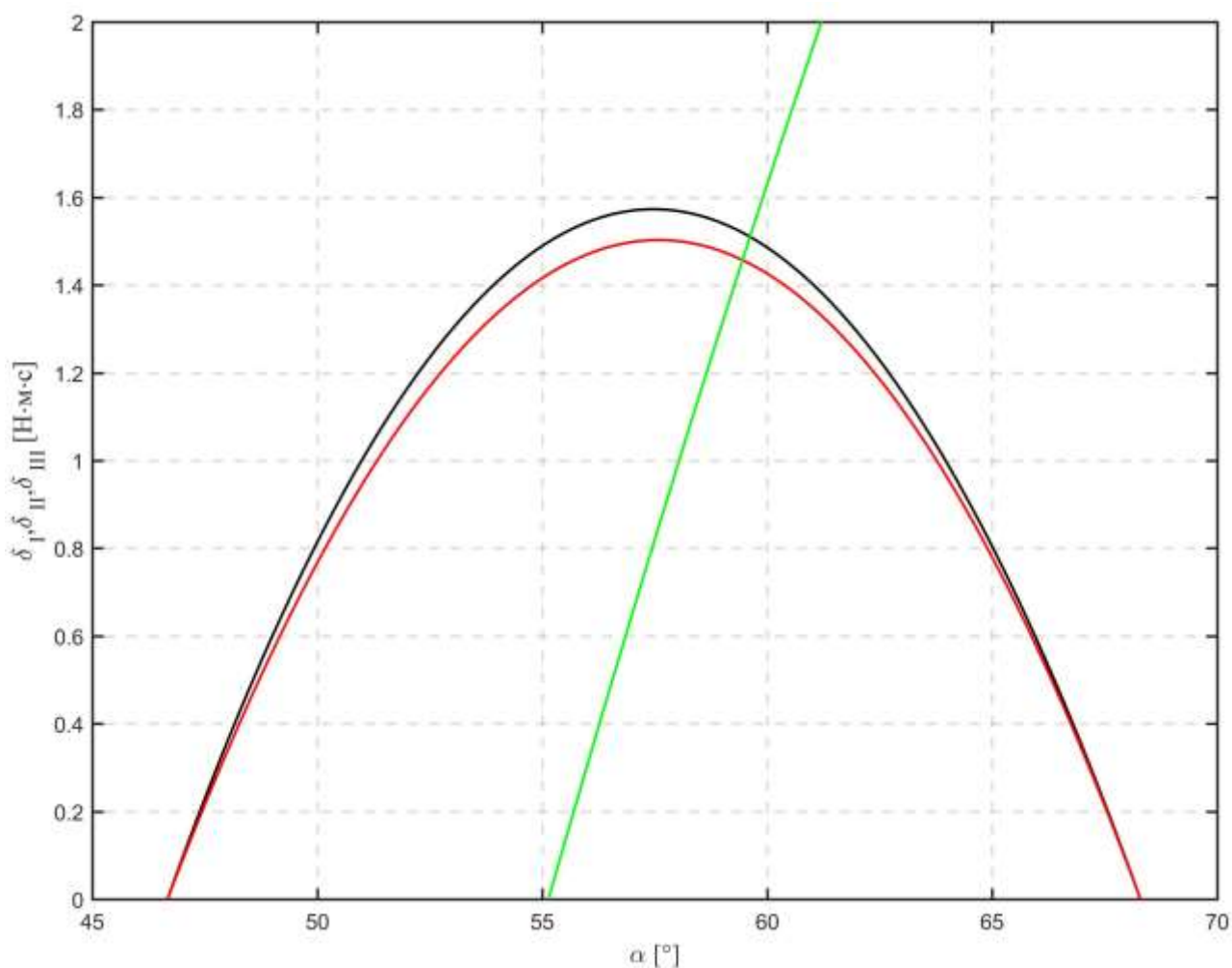


Рис. 6.15. Графики кривых $\delta_I(\alpha)$, $\delta_{II}(\alpha)$, $\delta_{III}(\alpha)$ при $\beta = 48^\circ$.

аппроксимирующий цилиндр будет находится внутри многогранника P_4 . Значения углов α и β можно найти из условия $\delta_I = \delta_{II} = \delta_{III}$, построив три

поверхности $\delta_I(\alpha, \beta)$, $\delta_{II}(\alpha, \beta)$, $\delta_{III}(\alpha, \beta)$ и найдя точку их пересечения, но также можно воспользоваться уравнением $\operatorname{tg}(\beta) = L_1 / L_3$ для вычисления значения угла β . Для приведенных выше значений L_1 , L_2 , L_3 угол $\beta = 48^\circ$. Зная угол β значение угла α можно найти как точку пересечения трех кривых $\delta_I(\alpha)$, $\delta_{II}(\alpha)$, $\delta_{III}(\alpha)$ приведенных на рис. 6.15. Здесь график $\delta_I(\alpha)$ показан черным цветом, $\delta_{II}(\alpha)$ – красным цветом, $\delta_{III}(\alpha)$ – зеленым цветом. Из рис. 6.15 принято значение угла $\alpha = 60^\circ$.

На рис. 6.16 показано взаимное расположение проекций годографа **Н**, аппроксимирующего цилиндра и двух вариантов многогранника P_4 . Красным цветом показаны проекции многогранника при значении углов $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 48^\circ$, черным цветом – при значении углов $\alpha = 54.7^\circ$ и $\beta = 45^\circ$. В рис. 13 видно, что в случае когда значения углов $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 48^\circ$ грани многогранника P_4 располагаются на большем расстоянии от поверхности цилиндра чем в случае $\alpha = 54.7^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

Проверить выбранные значения углов можно с помощью численного моделирования уравнений движения КА. На рис. 6.17 показаны графики зависимости от времени собственных кинетических моментов h_k , $k = \overline{1,4}$ каждого из двигателей-маховиков, полученные в результате численного моделирования уравнений движения КА в рамках модели приведенной в п. 5.1.3, но с учетом соотношений (6.8), (6.9), при значениях углов $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 48^\circ$.

Как и на рис. 5.7 – 5.12 (п. 5.1.3), графики на рис. 6.17 построены на интервалах времени 14 суток. Переходной процесс (процесс гашения возмущенного движения КА), обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости, длится менее 20 мин и из-за масштаба на рисунках не виден. Из рис. 6.17 видно, что на интервале времени с 6 по 8 сутки полета КА величины h_k , $k = \overline{1,4}$ превышают максимально допустимое значение $h_{\max} = 18 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, что вызвано наличием колебаний составляющих вектора гиросtatического момента

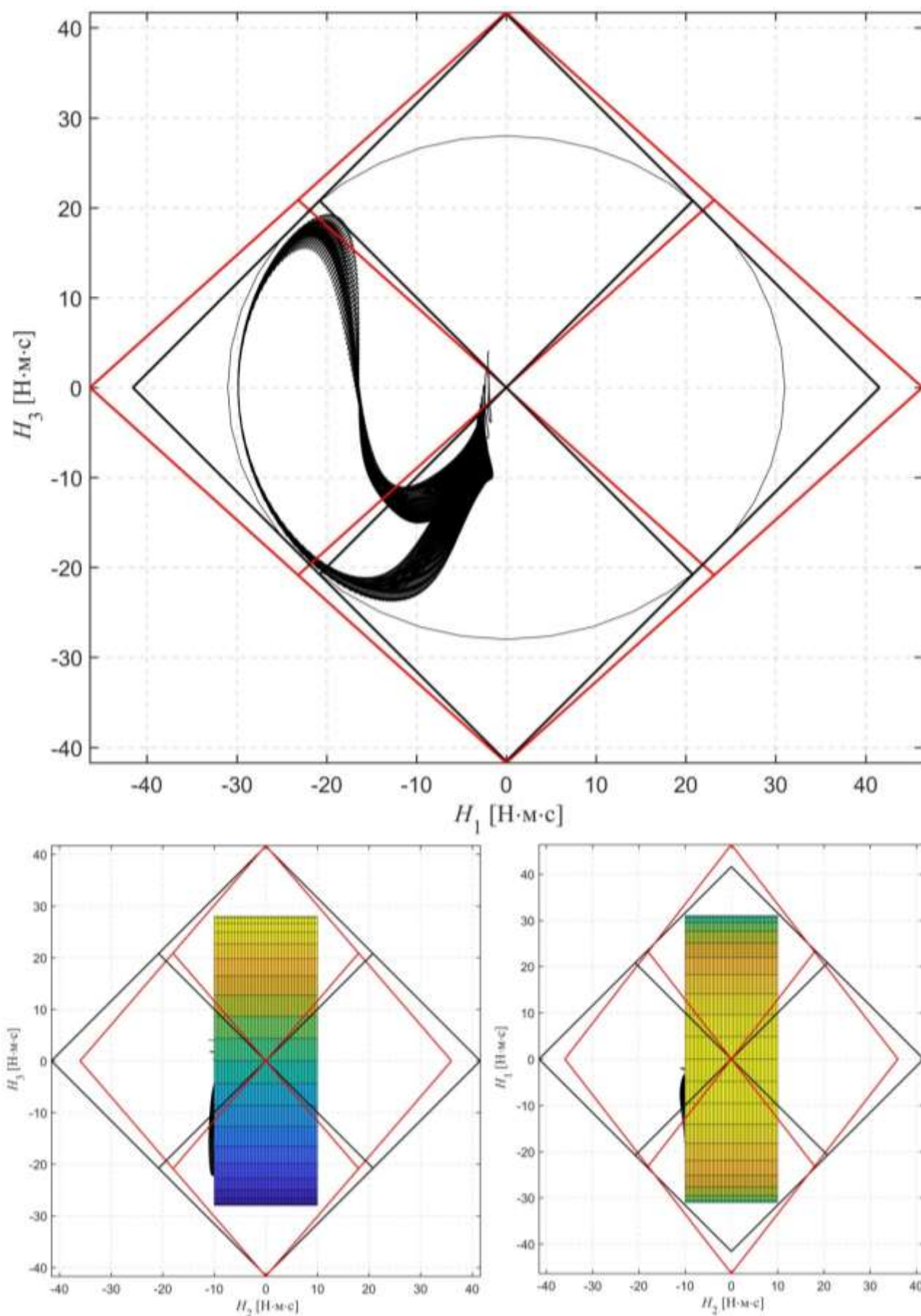


Рис. 6.16. Проекция годографа $\mathbf{H}$, аппроксимирующего цилиндра и двух вариантов многогранника P_4 .

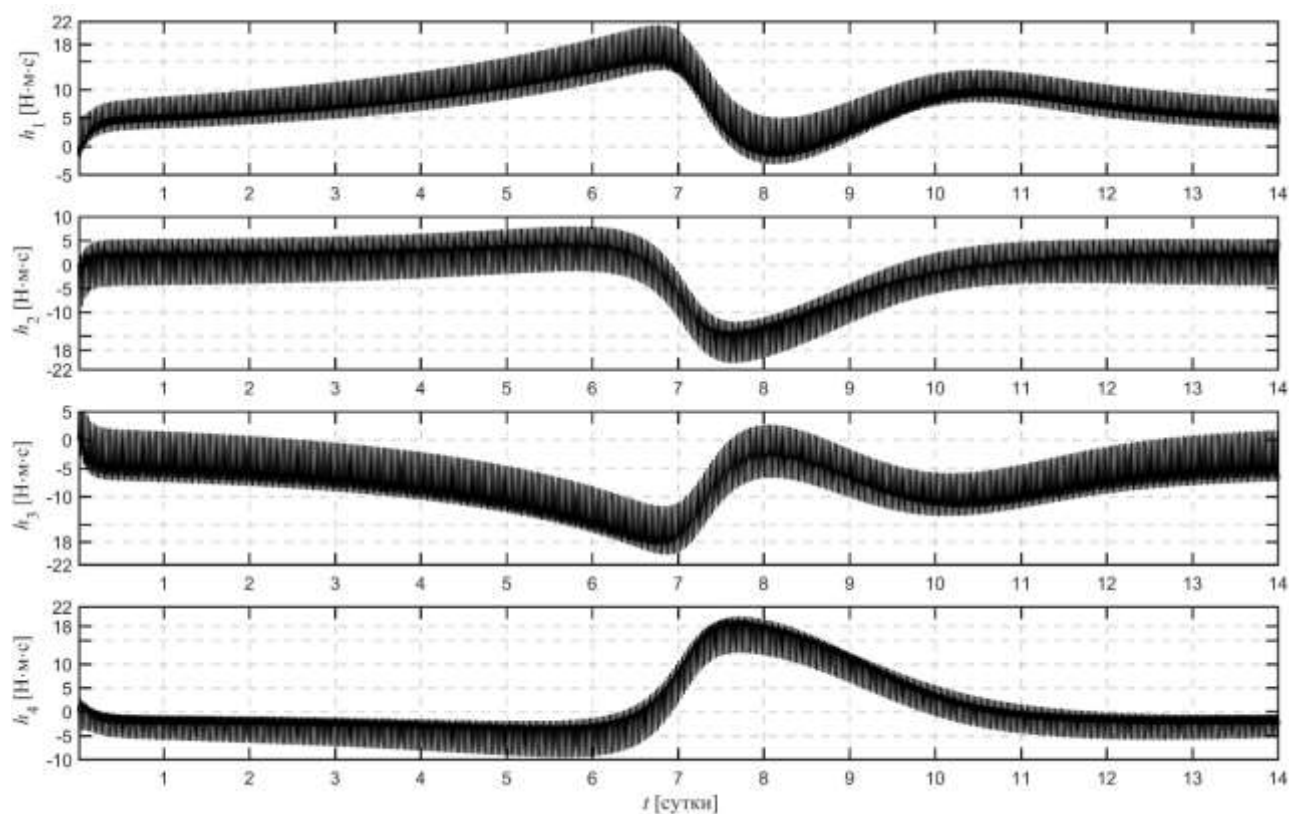


Рис. 6.17. Собственные кинетические моменты каждого маховика системы
(с использованием нормы ℓ_2).

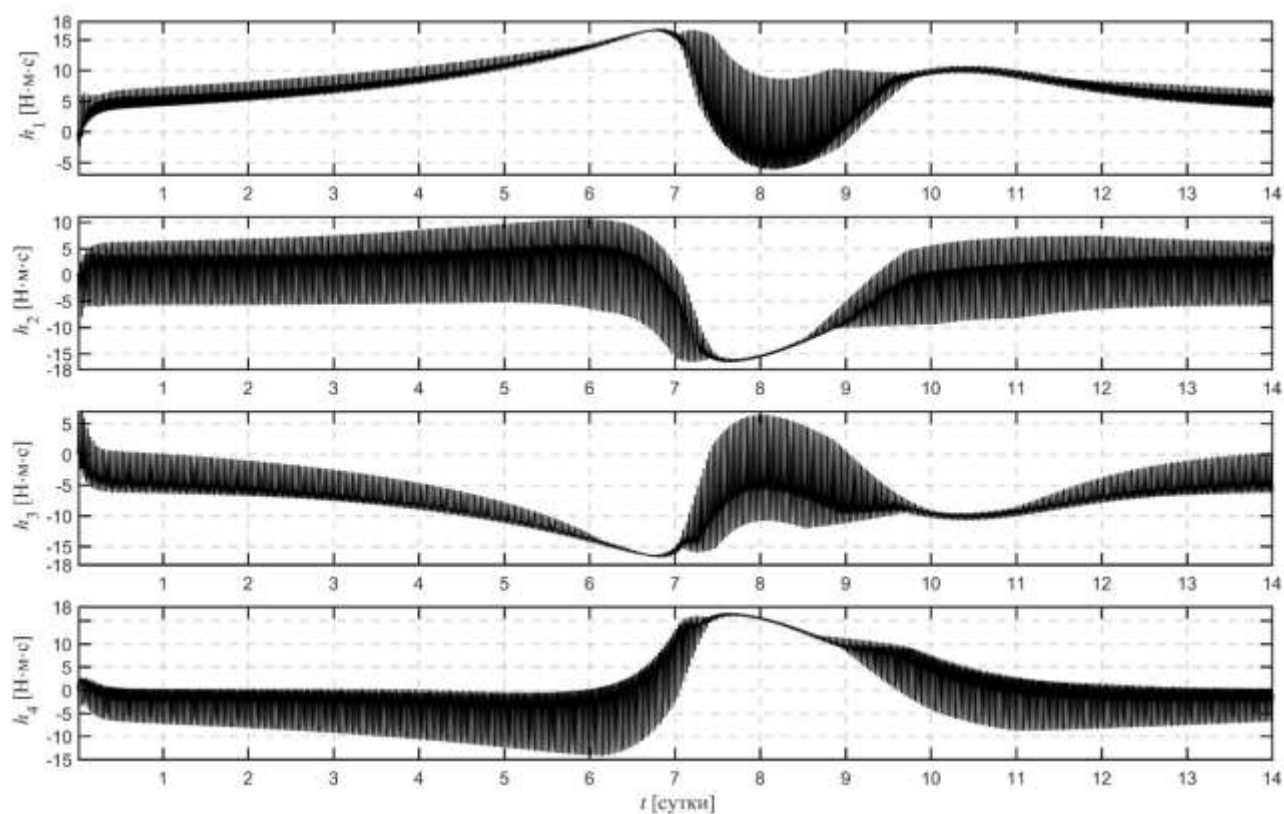


Рис. 6.18. Собственные кинетические моменты каждого маховика системы
(с использованием нормы ℓ_∞).

КА (см. рис. 5.12). Ограничить колебания величин h_k можно использовав другое условие достижения единственности решение системы (6.8) относительно h_k .

В качестве одного из таких условий используем требование минимума нормы

$$\ell_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq 4} |h_k|.$$

Как было сказано выше, в общем случае указанный метод представлен в виде некоторых алгоритмов поиска решения. Однако в случае, когда гиросистема состоит из четырех маховиков, оси вращения которых расположены параллельно боковым ребрам симметричной пирамиды решение системы (6.8) с помощью метода минимальной нормы ℓ_{∞} можно представить в виде [171]

$$\mathbf{G} = D^+ \mathbf{H} + h_0 \tilde{\mathbf{G}}, \quad h_0 = -\frac{\min(D^+ \mathbf{H}) + \max(D^+ \mathbf{H})}{2}. \quad (6.18)$$

Здесь символами $\min(\cdot)$ и $\max(\cdot)$ обозначены компоненты вектора имеющие минимальное и максимальное значения соответственно, $\tilde{\mathbf{G}}$ – вектор ядра [172] матрицы D , удовлетворяющий условию $D \tilde{\mathbf{G}} = (0, 0, 0)^T$. Для рассматриваемой схемы расположения маховиков ядро матрицы D состоит из единственного (помимо нулевого) базисного вектора $\tilde{\mathbf{G}} = (1, 1, 1, 1)^T$.

На рис. 6.18 показаны графики аналогичные приведенным на рис. 6.17, полученные в результате численного моделирования движения КА с учетом соотношений (6.8), (6.18). Графики на рис. 6.18 также построены на интервалах времени 14 суток при значениях углов $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 48^\circ$. Приведенные результаты моделирования показали, что использование метода минимальной нормы ℓ_{∞} при решении системы (6.8) позволяет выполнить условие $|h_k| < h_{\max}$, $k = \overline{1, 4}$ в процессе реализации рассматриваемого режима солнечной ориентации КА на всем интервале времени моделирования.

Чтобы при решении задач, связанных с выбором параметров схемы установки маховиков, каждый раз не менять формулы, зависящие от положения

высоты пирамиды относительно осей системы $Ox_1x_2x_3$, можно поступить следующим образом. Вводится некоторая система координат (к примеру $Ox'_1x'_2x'_3$), связанная непосредственно с пирамидой. Предположим, что она полностью совпадает с системой $Ox_1x_2x_3$ показанной на рис. 6.1. В этом случае орты $\mathbf{g}_k$, $k = \overline{1,4}$ будут представлены своими компонентами в новой системе $Ox'_1x'_2x'_3$, при этом вид формул для компонент вектора H_i , $i = \overline{1,3}$ (6.4), координат вершин V_i , $i = \overline{1,7}$ многогранника P_4 в системе $Ox'_1x'_2x'_3$, а также элементов матриц D и D^+ останется таким же, как в п. 6.1. Угловое положение пирамиды (системы $Ox'_1x'_2x'_3$) относительно осей системы $Ox_1x_2x_3$ жестко связанной с КА, будет задаваться некоторой матрицей перехода $S = (s_{ij})_{i,j=1}^3$, где s_{ij} – косинусы углов, которые ось Ox_j образует с осями Ox'_i . Тогда формулы (6.8), (6.9) и (6.18) примут вид $\mathbf{H} = SD\mathbf{G}$, $\mathbf{G} = D^+S^T\mathbf{H}$ и $\mathbf{G} = D^+S^T\mathbf{H} + h_0\tilde{\mathbf{G}}$ соответственно, где S – матрица перехода от $Ox'_1x'_2x'_3$ к $Ox_1x_2x_3$, вектор $\mathbf{G}$ – задается компонентами в системе $Ox'_1x'_2x'_3$, вектор $\mathbf{H}$ – задается компонентами в системе $Ox_1x_2x_3$. Положение многогранника P_4 относительно осей системы $Ox_1x_2x_3$ также будет полностью определяться элементами матрицы $S = (s_{ij})_{i,j=1}^3$.

6.4 Реализация углового движения с помощью гиродинов. Построение особых поверхностей систем гиродинов

Гиросистемы, используемые для управления угловым движением КА, можно реализовать на базе силовых гироскопических комплексов различного типа. Широкое распространение получили двухстепенные безупорные силовые гироскопы с постоянным по модулю значением создаваемого ими кинетического момента – гиродины. «Безупорные» в данном случае означает, что гиродины не

имеет ограничений по углу прецессии, т.е. по углу поворота рамки с постоянно вращающимся ротором. Основное преимущество гиродинов по сравнению с маховиками это величина механического момента, прикладываемого ими к корпусу КА. У гиродинов она примерно на порядок выше, чем у маховиков при одинаковом значении создаваемого ими кинетического момента. К недостаткам использования гиродинов относится их более высокая стоимость и сложность используемых законов управления. В частности, более сложной задачей (по сравнению с гиросистемами использующими маховики) является построение области H_C для проверки выполнения условия (6.1).

Рассмотрим КА, представляющий собой твердое тело, на котором установлены n одинаковых гиродинов. Собственный кинетический момент k -ого гиродин обозначим Γ_k , $|\Gamma_k| = \Gamma > 0$, $k = \overline{1, n}$, $n > 3$. Для расчета суммарного кинетического момента создаваемого системой гиродинов введем n правых декартовых систем координат – $Oz_1^{(k)}z_2^{(k)}z_3^{(k)}$ каждая из которых связана с k -ым гиродином. Ось прецессии k -ого гиродин параллельна оси $Oz_3^{(k)}$, вектор Γ_k направлен вдоль оси $Oz_1^{(k)}$.

Ориентацию системы $Oz_1^{(k)}z_2^{(k)}z_3^{(k)}$ относительно системы $Ox_1x_2x_3$ связанной с КА зададим с помощью углов Эйлера α_k , β_k и ε_k (рис. 6.19). Эти углы определяются следующим образом. Система $Ox_1x_2x_3$ может быть переведена в систему $Oz_1^{(k)}z_2^{(k)}z_3^{(k)}$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол α_k вокруг оси Ox_3 , 2) на угол β_k вокруг новой оси Ox_1 , 3) на угол ε_k вокруг новой оси Ox_3 , совпадающей с осью $Oz_3^{(k)}$. Углы α_k и β_k задают ориентацию оси прецессии гиродин в системе $Ox_1x_2x_3$. Угол ε_k задает поворот оси $Oz_1^{(k)}$ вокруг оси прецессии.

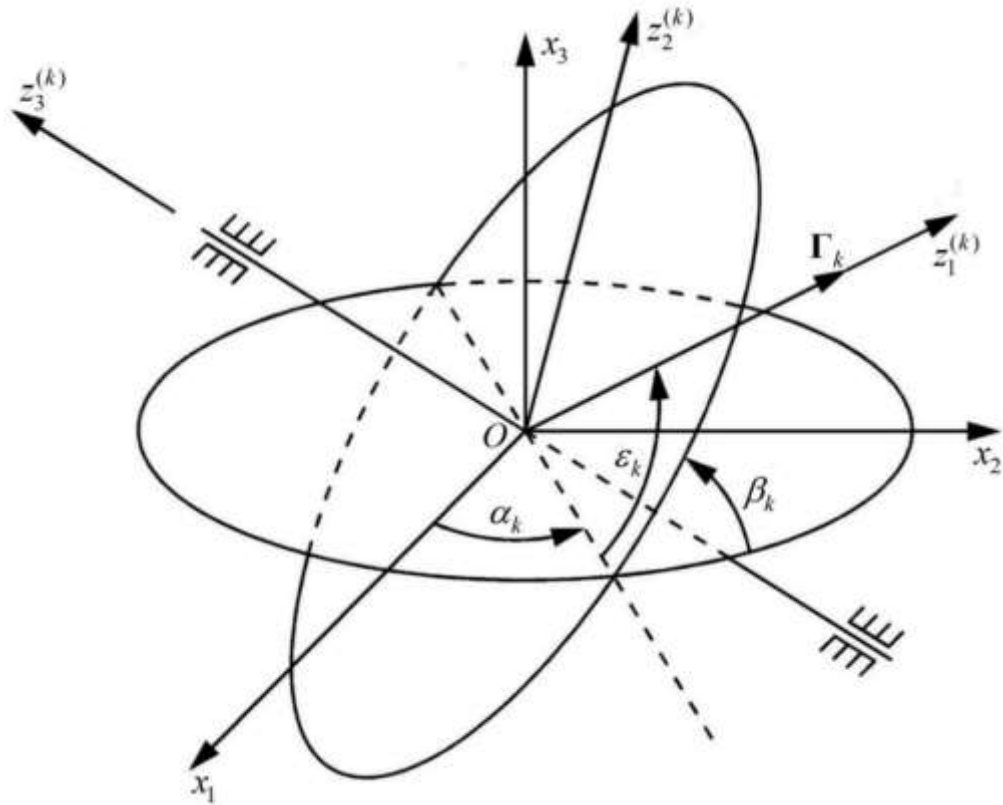


Рис. 6.19. Взаимное расположение систем $Oz_1^{(k)}z_2^{(k)}z_3^{(k)}$ и $Ox_1x_2x_3$.

Суммарный кинетический момента системы гироскопов имеет вид

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^n \mathbf{\Gamma}_k. \quad (6.19)$$

Рассмотрим область P пространства $R^3(\mathbf{H})$, образованную точками (6.19) при всех значениях ε_k . Эта область является областью возможных значений кинетического момента системы гироскопов. В процессе управления ориентацией КА вектор (6.19) должен быть заданной функцией времени t : $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t)$. Управление будет невозможным, если $\mathbf{H}(t) \notin P$ при некоторых значениях t .

В скалярном виде соотношение (6.19) имеет вид

$$H_i = \Gamma \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \sin \varepsilon_k + b_{ik} \cos \varepsilon_k \right), \quad i = \overline{1,3}, \quad (6.20)$$

$$a_{1k} = -\sin \alpha_k \cos \beta_k, \quad a_{2k} = \cos \alpha_k \cos \beta_k, \quad a_{3k} = \sin \beta_k,$$

$$b_{1k} = \cos \alpha_k, \quad b_{2k} = \sin \alpha_k, \quad b_{3k} = 0.$$

Поскольку величины α_k , β_k и Γ неизменны, формулы (6.20) можно представить в виде

$$H_i = f_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (6.21)$$

Будем использовать и векторную форму записи соотношения (6.21): $\mathbf{H} = f(\boldsymbol{\varepsilon})$. Функции (6.21) определяют преобразование пространства $R^n(\boldsymbol{\varepsilon})$ векторов $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$ в трехмерное пространство $R^3(\mathbf{H})$ векторов $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$. При этом почти всем значениям $\mathbf{H}$ соответствует бесконечное множество значений $\boldsymbol{\varepsilon}$. Введем матрицу Якоби, составленную из частных производных функций (6.21)

$$J(\boldsymbol{\varepsilon}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \varepsilon_k} \right),$$

которая имеет размер $3 \times n$. Здесь $i = \overline{1, 3}$ – индекс строки, $k = \overline{1, n}$ – индекс столбца. Значения $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^*$, для которых

$$\text{rank } J(\boldsymbol{\varepsilon}) < 3, \quad (6.22)$$

называют особыми. В общем случае преобразование (6.21) не отображает окрестность точки $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ на полную окрестность точки $\mathbf{H}^* = f(\boldsymbol{\varepsilon}^*)$, т.е. линейные вариации $\Delta \mathbf{H} = J(\boldsymbol{\varepsilon}^*) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, где $\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H} - \mathbf{H}^*$, $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*$, лежат в одной плоскости. Система гироидов не способна обеспечить изменение $\mathbf{H}$ в направлении, перпендикулярном этой плоскости. Следовательно, происходит частичная потеря управляемости КА.

Точку $\mathbf{H}^* = f(\boldsymbol{\varepsilon}^*)$ будем называть особой точкой в пространстве $R^3(\mathbf{H})$. В общем случае такие точки образуют некоторые поверхности $S^* \subset R^3(\mathbf{H})$ [129]. Плоскость, которой принадлежат вариации $\Delta \mathbf{H}$ в особой точке, является касательной плоскостью к поверхности S^* в этой точке. Встречаются и вырожденные случаи, когда множества значений $\mathbf{H}^*$ образуют не поверхности, а линии или изолированные точки. Очевидно, граница области P возможных значений $\mathbf{H}$ является одной из особых поверхностей. Эту поверхность

обозначим S^0 . Для систем гироидов типично существование поверхностей S^* , расположенных внутри области P .

В силу условия (6.22) при особом значении $\mathbf{\varepsilon} = \mathbf{\varepsilon}^*$ существуют величины λ_i , $i = \overline{1,3}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \varepsilon_k} = 0, \quad k = \overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 = 1. \quad (6.23)$$

Эти соотношения будем рассматривать как уравнения относительно неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, причем всюду будем считать, что $\text{rank } J(\mathbf{\varepsilon}^*) = 2$. Имеем $n+1$ уравнение относительно $n+3$ неизвестных. Таким образом, система уравнений (6.23) в общем случае задает в пространстве $R^{n+3}(\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\Lambda})$, $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ некоторую двумерную поверхность $S_{\varepsilon\Lambda}^*$, проекцию которой на пространство $R^n(\mathbf{\varepsilon})$ обозначим S_ε^* . Поверхность S_ε^* (также двумерная) образована особыми значениями $\mathbf{\varepsilon}$. Преобразование (6.21) переводит эту поверхность в особую поверхность S^* в пространстве $R^3(\mathbf{H})$. Если $(\mathbf{\varepsilon}^*, \mathbf{\Lambda}) \in S_{\varepsilon\Lambda}^*$, то $\mathbf{\varepsilon}^* \in S_\varepsilon^*$ и касательная плоскость к S^* в точке $f(\mathbf{\varepsilon}^*)$ задается уравнением $\mathbf{\Lambda} \cdot \Delta \mathbf{H} = 0$. Здесь $\mathbf{\Lambda}$ – единичная нормаль к этой плоскости.

Представление о форме поверхности S^* дают ее сечения плоскостями $H_i = H_0 = \text{const}$, где i – одно из чисел 1, 2, 3. Для этого систему уравнений (6.23) дополним уравнением $f_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = H_0$. И построим кривые, задаваемые получившейся системой:

$$f_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = H_0, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \varepsilon_k} = 0, \quad k = \overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 - 1 = 0. \quad (6.24)$$

Кривые (6.24) лежат в пространстве $R^{n+3}(\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\Lambda})$, но можно рассматривать их проекции на пространстве $R^n(\mathbf{\varepsilon})$, а преобразование (6.21) позволяет отобразить эти проекции в пространство $R^3(\mathbf{H})$. Полученные в результате кривые

представляют собой искомые сечения. Далее в работе для численного решения системы нелинейных уравнений (6.24) использовался метод продолжения по параметру [137, 138].

При построении описанных выше кривых следует учитывать, существуют особые точки двух типов – проходимые и непроходимые [129]. Напомним их определения. Предположим, что система гироидов должна реализовать заданную гладкую функцию $\mathbf{H}(t)$, причем $\mathbf{H}(0)$ – особая точка, отвечающая особому значению $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^*$: $\mathbf{H}(0) = f(\boldsymbol{\varepsilon}^*)$. Если эта особая точка проходимая, то движение $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(0) = \boldsymbol{\varepsilon}^*$, реализующее такую функцию существует, но в общем случае не является гладким. Если $\dot{\mathbf{H}}(0) \neq 0$, то $\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)\| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$. Такое движение нельзя выполнить технически. Если ограничиться гладкими движениями $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(0) = \boldsymbol{\varepsilon}^*$, то можно построить функцию $\tilde{\mathbf{H}}(t) = f(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))$, имеющую одинаковый годограф с исходной функцией $\mathbf{H}(t)$, но удовлетворяющую условию $\dot{\tilde{\mathbf{H}}}(0) = 0$. В принципе, подходящим выбором $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ можно обеспечить равенство $\mathbf{H}(t) = \tilde{\mathbf{H}}(t)$ всюду, за исключением малой окрестности точки $t = 0$. В случае непроходимой особой точки реализовать функцию $\mathbf{H}(t)$ непрерывным движением $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ таким, что $\boldsymbol{\varepsilon}(0) = \boldsymbol{\varepsilon}^*$, нельзя. Очевидно, особая поверхность S^0 – граница области P – непроходима.

Определение типа особых точек требует исследования в этих точках второго дифференциала преобразования (6.21). Пусть $\mathbf{H}^* = f(\boldsymbol{\varepsilon}^*)$ – особая точка в пространстве $R^3(\mathbf{H})$. Тогда при $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^*$ и некотором $\boldsymbol{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ справедливы соотношения (6.23). Вектор $\boldsymbol{\Lambda}$ представляет собой единичную нормаль касательной плоскости к особой поверхности S^* в точке $\mathbf{H}^*$. Зададим два вектора $\boldsymbol{\Theta} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)^T$ и $\boldsymbol{\Psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$, лежащие в этой плоскости и удовлетворяющие соотношениям $\boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0$, $|\boldsymbol{\Psi}| = |\boldsymbol{\Theta}| = 1$. Векторы $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Theta}$ и $\boldsymbol{\Psi}$ образуют ортонормированный базис в $R^3(\mathbf{H})$. Рассмотрим главные

члены компонент вариации $\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H} - \mathbf{H}^*$ в этом базисе:

$$h_\lambda = \Lambda \cdot \Delta \mathbf{H} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \Delta \varepsilon_j \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_k}, \quad (6.25)$$

$$h_g = \Theta \cdot \Delta \mathbf{H} = \sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\partial f_i(\mathbf{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_k}, \quad h_\psi = \Theta \cdot \Delta \mathbf{H} = \sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\mathbf{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_k}.$$

В силу (6.23) в правой части первой формулы (6.25) линейный относительно $\Delta \varepsilon_k$ член отсутствует. Эта правая часть представляет собой квадратичную форму относительно $\Delta \varepsilon_k$. Оказывается, в ряде случаев для определения типа особой точки достаточно найти экстремумы этой квадратичной формы при условии

$$\sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\partial f_i(\mathbf{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\mathbf{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_k} = 0.$$

Иными словами, следует найти экстремумы функции $\varphi = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ при условии $B \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$, где $\mathbf{x} = (\Delta \varepsilon_1, \dots, \Delta \varepsilon_n)^T$ и

$$A = \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_j} \right), \quad B = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\partial f_i(\mathbf{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_k} \\ \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\mathbf{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_k} \end{pmatrix}.$$

Матрица A – симметричная и имеет размер $n \times n$, матрица B имеет размер $2 \times n$, $j, k = \overline{1, n}$, причем $\text{rang } B = 2$.

Чтобы найти условный экстремум функции φ воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Необходимое условие экстремума сводится к системе уравнений

$$A \mathbf{x} + B^T \boldsymbol{\eta} + \mu \mathbf{x} = 0, \quad B \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \quad (6.26)$$

где $\boldsymbol{\eta} \in R^2$, $\mu \in R^1$ – неопределенные множители. Умножим первое уравнение системы (6.26) слева на матрицу B , получим $BA \mathbf{x} + BB^T \boldsymbol{\eta} + \mu B \mathbf{x} = 0$. С учетом уравнения $B \mathbf{x} = 0$ можно записать $\boldsymbol{\eta} = -(BB^T)^{-1} BA \mathbf{x}$. Подставив полученное выражение в первое уравнение (6.26), будем иметь

$$\left[E_n - B^T (BB^T)^{-1} B \right] A \mathbf{x} = -\mu \mathbf{x},$$

где E_n – единичная матрица порядка n . Рассмотрим собственные числа матрицы

$$M = \left[E_n - B^T (BB^T)^{-1} B \right] A.$$

Она имеет порядок n . Поскольку $BM = 0$, $\text{rank } M \leq n - 2$, т. е. матрица M всегда имеет, по крайней мере, два нулевых собственных числа. Из результатов [129] следует, что если среди ненулевых собственных чисел M есть числа разных знаков, то особая точка проходима. Если же матрица M имеет $n - 2$ ненулевых собственных числа одного знака, то исследуемая особая точка непроходима [129]. Более детальная классификация, особых точек содержится в [128, 129].

Докажем достаточное условие проходимости особой точки, сформулированное выше. Пусть $\mathbf{H}^* = f(\boldsymbol{\varepsilon}^*)$ – особая точка и составленная для нее система (6.26) допускает два решения, в одном из которых $\mu < 0$, а в другом $\mu > 0$. Эти решения обозначим соответственно $\mathbf{x} = (F_1, \dots, F_n)^T$, $\mu = \mu_F$ и $\mathbf{x} = (G_1, \dots, G_n)^T$, $\mu = \mu_G$. Имеют место соотношения

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n F_j F_k \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_k} = \mu_F < 0, \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^n F_k \sum_{i=1}^3 \mathcal{G}_i \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_k} &= \sum_{k=1}^n F_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_k} = 0, \\ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n G_j G_k \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_k} &= \mu_G > 0, \quad (6.28) \\ \sum_{k=1}^n G_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^n G_k \sum_{i=1}^3 \mathcal{G}_i \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_k} &= \sum_{k=1}^n G_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_k} = 0. \end{aligned}$$

Пусть через особую точку $\mathbf{H}^* = (H_1^*, H_2^*, H_3^*)^T$ проходит кривая

$$H_i(t) = H_i^* + H_i' t + o(t), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (6.29)$$

$$|H_1'| + |H_2'| + |H_3'| > 0.$$

Покажем, как ее можно реализовать в виде $H_i(t) = f_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t))$, $\boldsymbol{\varepsilon}(0) = \boldsymbol{\varepsilon}^*$. Рассмотрим

компоненты вектора $\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H}(t) - \mathbf{H}^*$ в базисе Λ, Θ, Ψ

$$\begin{aligned} h_\lambda &= \Lambda \cdot \Delta \mathbf{H} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i (H_i - H_i^*) = \Lambda t + o(t), & \Lambda &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i H_i', \\ h_g &= \Theta \cdot \Delta \mathbf{H} = \sum_{i=1}^3 g_i (H_i - H_i^*) = \Theta t + o(t), & \Theta &= \sum_{i=1}^3 g_i H_i', \\ h_\psi &= \Psi \cdot \Delta \mathbf{H} = \sum_{i=1}^3 \psi_i (H_i - H_i^*) = \Psi t + o(t), & \Psi &= \sum_{i=1}^3 \psi_i H_i'. \end{aligned}$$

С другой стороны, используя разложение функций $f_i(\mathbf{\varepsilon})$ в ряд Тейлора в окрестности особой точки, запишем

$$\Delta H_i = H_i - H_i^* = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_k} \Delta \varepsilon_k + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_k} \Delta \varepsilon_j \Delta \varepsilon_k + O(\|\Delta \mathbf{\varepsilon}\|^3),$$

где $\Delta \mathbf{\varepsilon} = (\Delta \varepsilon_1, \dots, \Delta \varepsilon_n)^T = \mathbf{\varepsilon} - \mathbf{\varepsilon}^*$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} h_\lambda &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \Delta \varepsilon_j \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_k} + O(\|\Delta \mathbf{\varepsilon}\|^3), \\ h_g &= \sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\partial f_i(\mathbf{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_k} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \Delta \varepsilon_j \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_k} + O(\|\Delta \mathbf{\varepsilon}\|^3), \\ h_\psi &= \sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\mathbf{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_k} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \Delta \varepsilon_j \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{\varepsilon}^*)}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_k} + O(\|\Delta \mathbf{\varepsilon}\|^3). \end{aligned} \tag{6.30}$$

В первом выражении (6.30) в силу условий (6.23) отсутствуют члены первой степени относительно $\Delta \varepsilon_k$.

Пусть для определенности $\Lambda > 0$. Главные члены кривой $\mathbf{\varepsilon}(t)$ в окрестности точки $t = 0$ ищем в виде

$$\varepsilon_k(t) = \begin{cases} F_k \sqrt{\frac{\Lambda t}{\mu_F}} + C_k t & \text{при } t \leq 0, \\ G_k \sqrt{\frac{\Lambda t}{\mu_G}} + D_k t & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \tag{6.31}$$

где C_k и D_k – не определенные пока коэффициенты, $k = \overline{1, n}$. В силу (6.27) и (6.28) подкоренные выражения в (6.31) положительны. Подставим формулы

(6.31) в первое выражение (6.30). Получим

$$h_\lambda = \frac{\Lambda t}{2\mu_F} \sum_{j,k=1}^n F_j F_k \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{\epsilon}^*)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k} + o(|t|) = \Lambda t + o(|t|) \quad \text{при } t \leq 0,$$

$$h_\lambda = \frac{\Lambda t}{2\mu_G} \sum_{j,k=1}^n G_j G_k \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{\epsilon}^*)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k} + o(|t|) = \Lambda t + o(t) \quad \text{при } t \geq 0.$$

Таким образом, функция $h_\lambda(t)$ имеет требуемый вид. Подстановка формул (6.31) во второе выражение (6.30) дает

$$h_g = \left[\sum_{k=1}^n C_k \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\partial f_i(\mathbf{\epsilon}^*)}{\partial \epsilon_k} + \frac{\Lambda}{2\mu_F} \sum_{j,k=1}^n F_j F_k \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{\epsilon}^*)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k} \right] t + o(|t|) \quad \text{при } t \leq 0,$$

$$h_g = \left[\sum_{k=1}^n D_k \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\partial f_i(\mathbf{\epsilon}^*)}{\partial \epsilon_k} + \frac{\Lambda}{2\mu_G} \sum_{j,k=1}^n G_j G_k \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{\epsilon}^*)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k} \right] t + o(t) \quad \text{при } t \geq 0.$$

Оба множителя при t здесь должны быть равны Θ . Это приводит к уравнениям относительно C_k и D_k :

$$\sum_{k=1}^n C_k \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\partial f_i(\mathbf{\epsilon}^*)}{\partial \epsilon_k} = \Theta - \frac{\Lambda}{2\mu_F} \sum_{j,k=1}^n F_j F_k \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{\epsilon}^*)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k}, \quad (6.32)$$

$$\sum_{k=1}^n D_k \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\partial f_i(\mathbf{\epsilon}^*)}{\partial \epsilon_k} = \Theta - \frac{\Lambda}{2\mu_G} \sum_{j,k=1}^n G_j G_k \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{\epsilon}^*)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k}. \quad (6.33)$$

Рассмотрев аналогичным образом h_ψ , получим еще два уравнения

$$\sum_{k=1}^n C_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\mathbf{\epsilon}^*)}{\partial \epsilon_k} = \Psi - \frac{\Lambda}{2\mu_F} \sum_{j,k=1}^n F_j F_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{\epsilon}^*)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k}, \quad (6.34)$$

$$\sum_{k=1}^n D_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\mathbf{\epsilon}^*)}{\partial \epsilon_k} = \Psi - \frac{\Lambda}{2\mu_G} \sum_{j,k=1}^n G_j G_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{\epsilon}^*)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k}. \quad (6.35)$$

Системы (6.32), (6.34) и (6.33), (6.35) разрешимы и определяют коэффициенты C_k и D_k соответственно, но не единственным образом. По этой причине построенная кривая $\mathbf{\epsilon}(t)$ не единственна. Ее недостаток – производные $\dot{\mathbf{\epsilon}}(t)$ не ограничены при $t \rightarrow 0$. Преодолеть этот недостаток можно взяв, например,

$$\varepsilon_k(t) = \begin{cases} F_k \sqrt{\frac{\Lambda |t| t}{\mu_F}} + C_k |t| t & \text{при } t \leq 0, \\ G_k \sqrt{\frac{\Lambda t^2}{\mu_G}} + D_k t^2 & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$$

где коэффициенты C_k и D_k имеют указанный выше вид. Тогда вместо (6.29) получим $H_i(t) = H_i^* + H_i' t |t| + o(t^2)$, $i = \overline{1, 3}$, что приводит к соотношению $\dot{\mathbf{H}}(0) = 0$.

Для примера построения особых поверхностей рассмотрим систему из шести гироскопов, расположенных по схеме, представленной на рис. 6.20 и известной под названием «3-SPE» (Scissored Pair Ensemble). В этой схеме каждой координатной оси Ox_i , $i = \overline{1, 3}$ параллельны оси прецессии двух гироскопов. Значения соответствующих углов α_k и β_k приведены в табл. 3. Величины $|\Gamma_k| = \Gamma = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $k = \overline{1, 6}$.

Таблица 3.

Угол	1	2	3	4	5	6
β_k	90°	90°	90°	90°	180°	0°
α_k	90°	270°	0°	180°	90°	270°

Считаем, что угловое движение гироскопов относительно осей прецессии ничем не ограничено.

Преимущество схемы «3-SPE» состоит в том, что при ее использовании внутри области вариации создаваемого кинетического момента отсутствуют непроходимые особые поверхности. Кроме того, схема «3-SPE» позволяет в случае необходимости использовать систему гироскопов в виде трех пар, т.е. в любой момент времени будут выполняться соотношения $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$, $\varepsilon_5 = \varepsilon_6$. С точки зрения создаваемого кинетического момента схема «3-SPE» трех пар гироскопов эквивалентна схеме из трех двигателей-маховиков, оси

вращения которых расположены вдоль каждой их осей Ox_i , $i = \overline{1,3}$. Очевидно, что кинетический момент каждого из маховиков эквивалентной схемы будет равен 2Γ . Однако система из трех парок гироскопов создает больший (примерно на порядок) механический момент, приложенный к корпусу КА, чем система из трех маховиков.

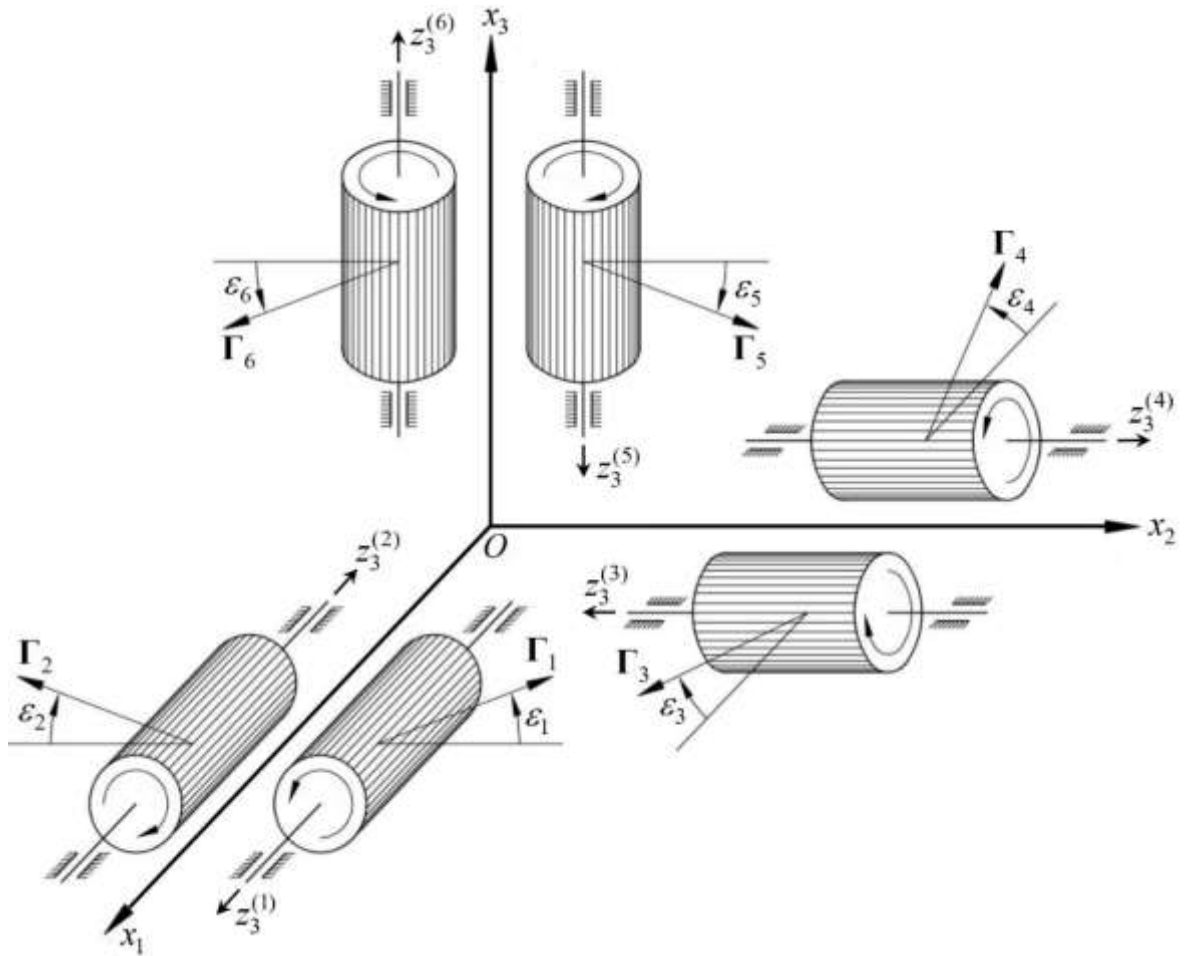


Рис. 6.20. Система из шести гироскопов «3-SPE».

Будем рассматривать два случая построения особых поверхностей для схемы «3-SPE» – первый, когда число гироскопов $n = 6$, и второй случай, когда один из гироскопов отключен (вышел из строя), т.е. $n = 5$. Здесь и далее в этом разделе все поверхности и сечения построены в системе координат $ON_1N_2N_3$, оси которой совпадают с соответствующими индексу осями системы $Ox_1x_2x_3$.

В случае $n = 6$ у схемы «3-SPE» поверхность S^0 (внешняя граница области

P) обладает центральной симметрией относительно точки $\mathbf{H} = 0$ и зеркальной симметрией относительно координатных плоскостей. В такой ситуации можно ограничиться исследованием сечений поверхности S^0 только плоскостями $H_3 = \text{const}$. На рис. 6.21 представлен общий вид поверхности S^0 , на рис. 6.22 показано сечение поверхности S^0 плоскостью $H_3 = 0$. Поверхность S^0 является выпуклой и гладкой.

Рассмотрим случай $n=5$, т.е. когда один из гиродинов отключен. Без ограничения общности можно считать, что отключен гиродин №4. Поверхность S^0 в этом случае обладает центральной симметрией относительно точки $\mathbf{H} = 0$ и осевой симметрией относительно прямой $H_1 = H_3 = 0$.

Если число работающих гиродинов меньше 6, то на поверхности S^0 появляются вмятины (см. рис. 6.25), а внутри области P возникают непроходимые поверхности S^* (см. рис. 6.23 – 6.26). На рис. 6.24, 6.26 в качестве примера показаны сечения особых поверхностей S^0 и S^* , здесь на рисунках сечения непроходимых особых поверхностей показаны сплошными черными линиями, а проходимых – штриховыми красными линиями.

На рис. 6.23, 6.25 показаны особые поверхности S^0 и S^* построенные набором сечений перпендикулярных соответствующим осям OH_i , $i = \overline{1,3}$. Наличие вмятин на поверхности S^0 и непроходимых особых поверхностей внутри области P связано с отсутствием коллинеарной пары у отключенного гиродина.

Следует отметить, что в работах [130, 131] приведены области вариации вектора суммарного кинетического момента для системы гиродинов «3-SPE», которые полностью совпадают с областями, построенными в п. 6.4 данной главы.

Для расчета и построения особых поверхностей использовался специально разработанный программно-математический комплекс [144].

Каждой схеме расположения гиродинов соответствует своя особая поверхность S^0 , фактически представляющая собой внешнюю границу области

H_C , которую можно использовать для проверки выполнения условия (6.1).

На рис. 6.27, 6.28 в качестве примера приведена проверка выполнения условия (6.1) для области H_T , представляющей собой эллипсоид, рассмотренный в п. 6.1 при значении $\omega_{\max} = 0.184^\circ / \text{с}$ (см. рис. 6.4, сверху). В данном случае, задавшись значением $\omega_{\max}$ можно подобрать соответствующее значение $|\Gamma_k| = \Gamma$, обеспечивающее выполнение условия 6.1. На рис. 6.28 показаны возможности рассматриваемой гиросистемы в случае отказа одного из гиросинов. Из рисунка 6.28 видно, что при отказе гиросина №4 эллипсоид H_T не пересекает, образовавшиеся в результате отказа, внутренние непроходимые особые поверхности S^* , что в целом в сложившейся ситуации является положительным фактором.

Основные результаты главы 6

В главе 6 исследованы два варианта гиросистемы КА для управления его угловым движением. Один вариант реализован на основе четырех двигателей-маховиков, расположенных по схеме «четырёхугольная пирамида», другой вариант – на шести гиросинах, расположенных по схеме «3-SPE». Для каждого из вариантов построены области создаваемых гиросистемой значений суммарного кинетического момента, в том числе при отказе одного из гироскопических органов управления.

На основе сравнения множеств требуемых значений кинетического момента и максимальных значений кинетического момента, реализуемых гиросистемой предложена методика выбора геометрических параметров схемы расположения и физических характеристик двигателей-маховиков, обеспечивающих реализацию рассмотренных режимов углового движения КА.

Для режима солнечной ориентации КА, рассмотренного в главе 5 данной работы выбраны такие значения геометрических параметров схемы двигателей-маховиков, которые позволяют реализовать указанный режим на длительном

интервале времени без проведения разгрузок гиросtatического момента.

Приведены результаты численного моделирования системы уравнений движения КА, подтверждающие правильность выбранных значений параметров схемы маховиков при длительной стабилизации КА, как в орбитальной, так и в солнечной ориентации.

Основные полученные результаты:

1. Разработана методика выбора геометрических параметров схемы расположения и физических характеристик двигателей-маховиков, обеспечивающих реализацию предложенных режимов углового движения КА. Для схемы «четырёхугольная пирамида» получены аналитические зависимости для выбора оптимальных значений геометрических параметров установки маховиков при реализации режимов программных разворотов, а также поддержания орбитальной и солнечной ориентации КА.
2. Для систем двухстепенных гироскопов (гиродинов) предложен и обоснован способ расчёта и построения особых поверхностей, основанный на методе продолжения по параметру. Формализованы достаточные условия, позволяющие определить тип особых поверхностей. Для рассмотренной системы гиродинов установленных на КА по схеме «3-SPE» приведены примеры построения особых поверхностей. Показаны вычислительные и графические возможности созданного программно-математического комплекса, используемого при выборе геометрических параметров схемы расположения гиродинов.

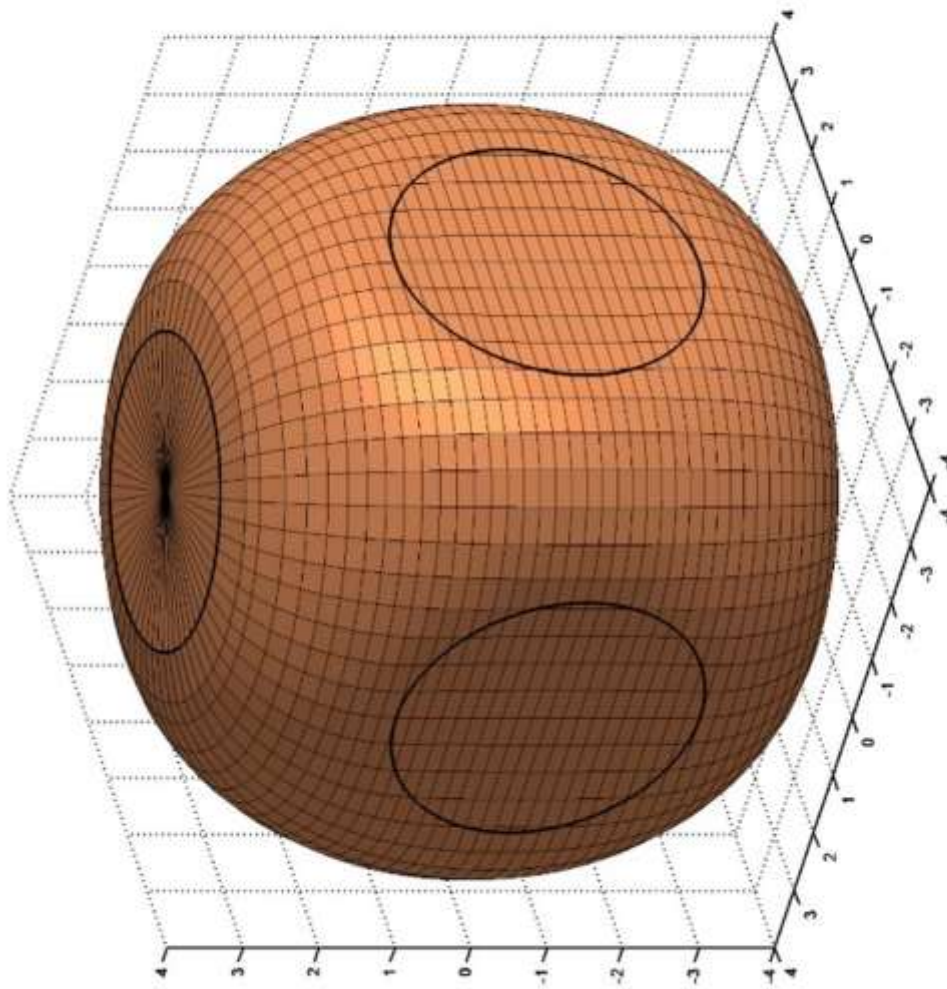


Рис. 6.21. Общий вид поверхности S^0 ($n=6$).

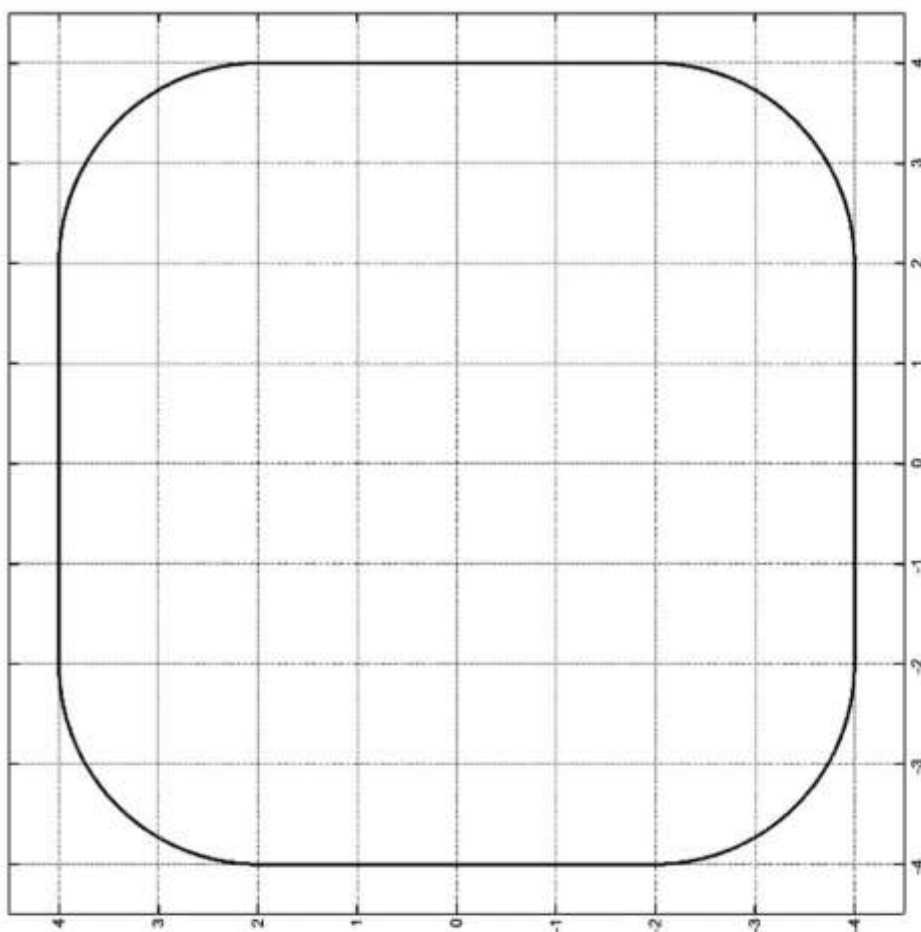


Рис. 6.22. Сечение поверхности S^0 ($n=6$)

плоскостью $H_3 = 0$.

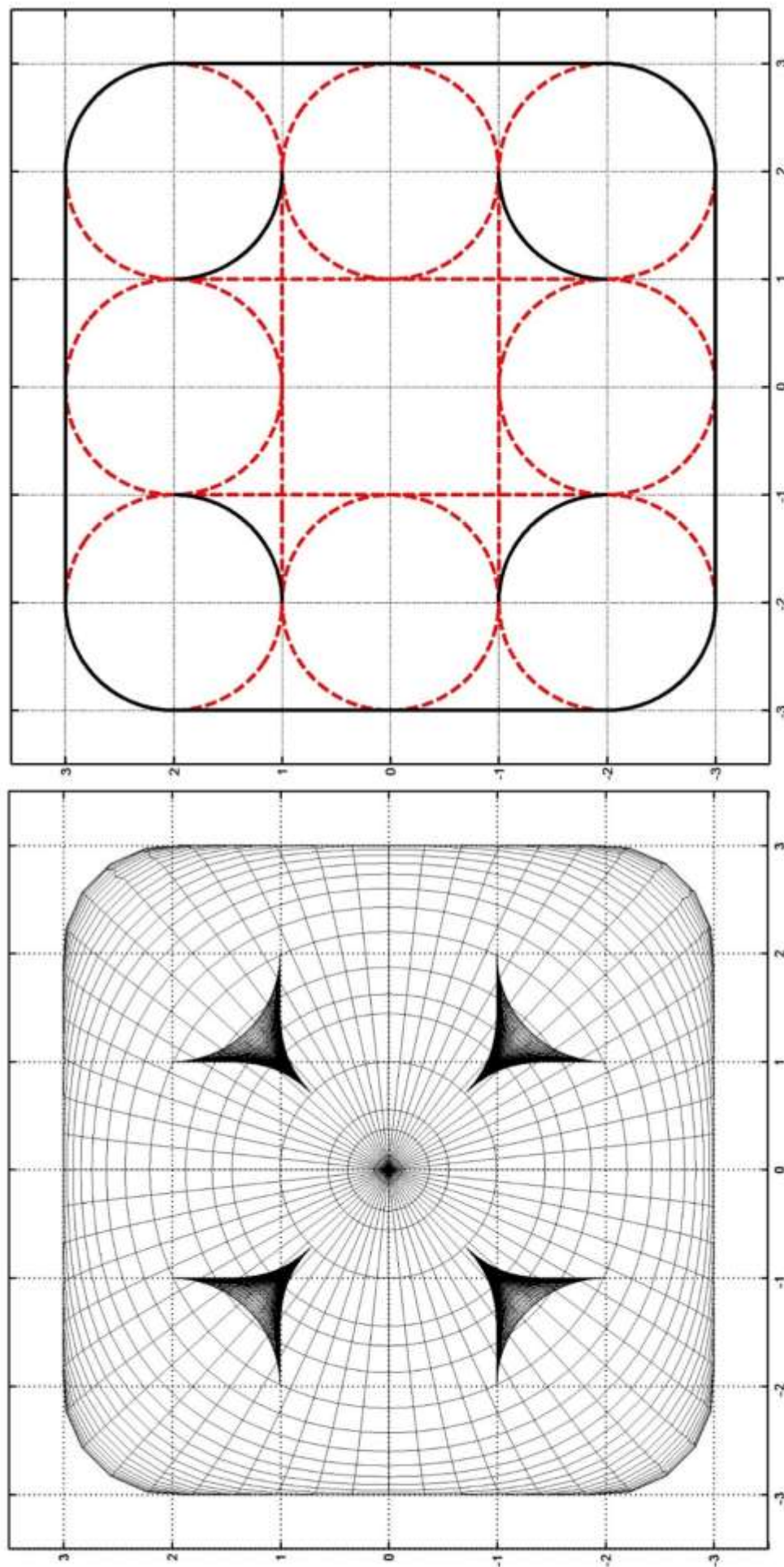


Рис. 6.23. Вид поверхностей S^0 и S^* ($n=5$)

с конца оси H_2 .

Рис. 6.24. Сечение поверхностей S^0 и S^* ($n=5$)

плоскостью $H_2 = 0$.

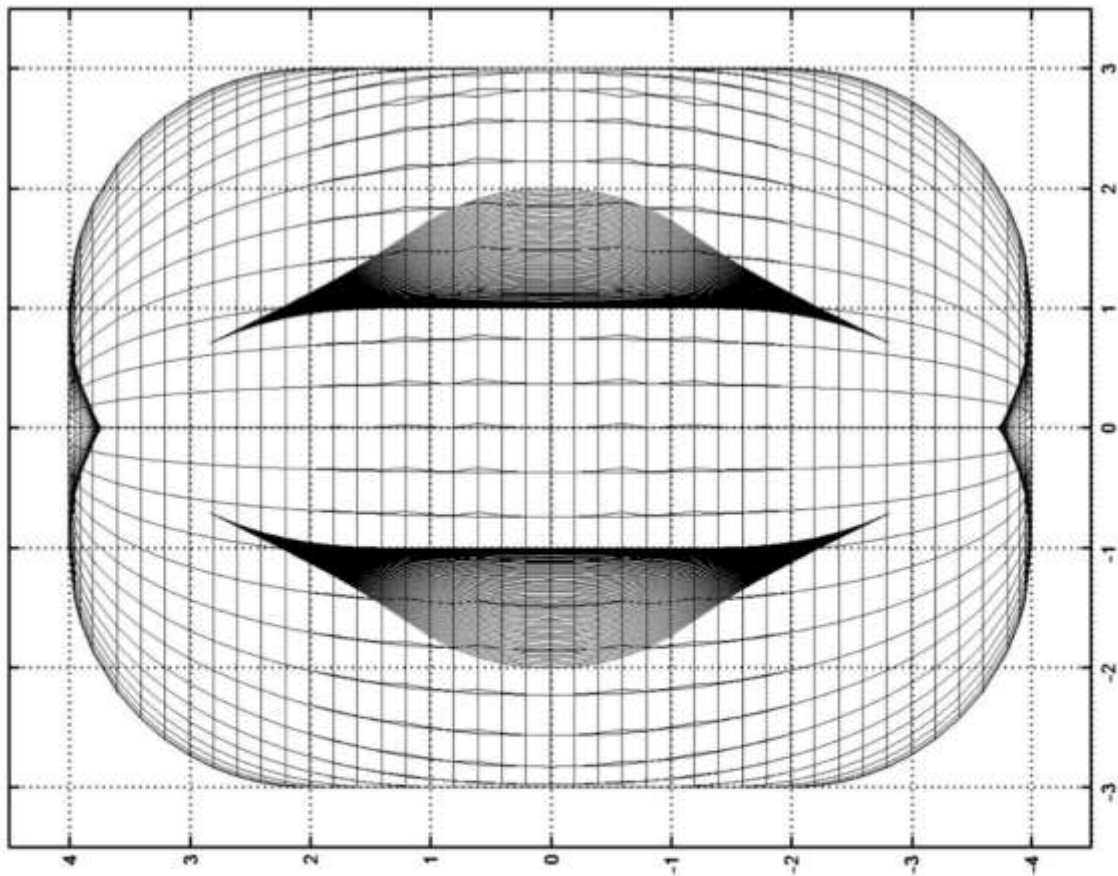


Рис. 6.25. Вид поверхностей S^0 и S^* ($n=5$)

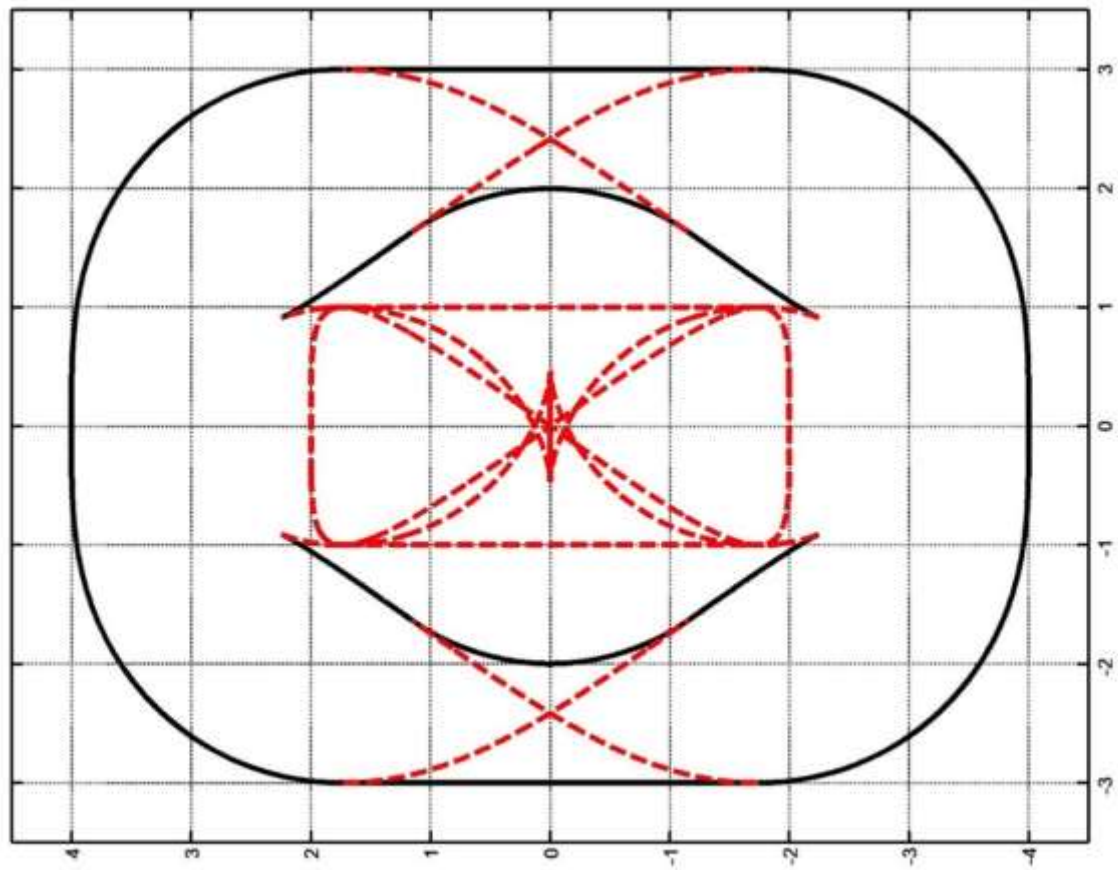


Рис. 6.26. Сечение поверхностей S^0 и S^* ($n=5$)

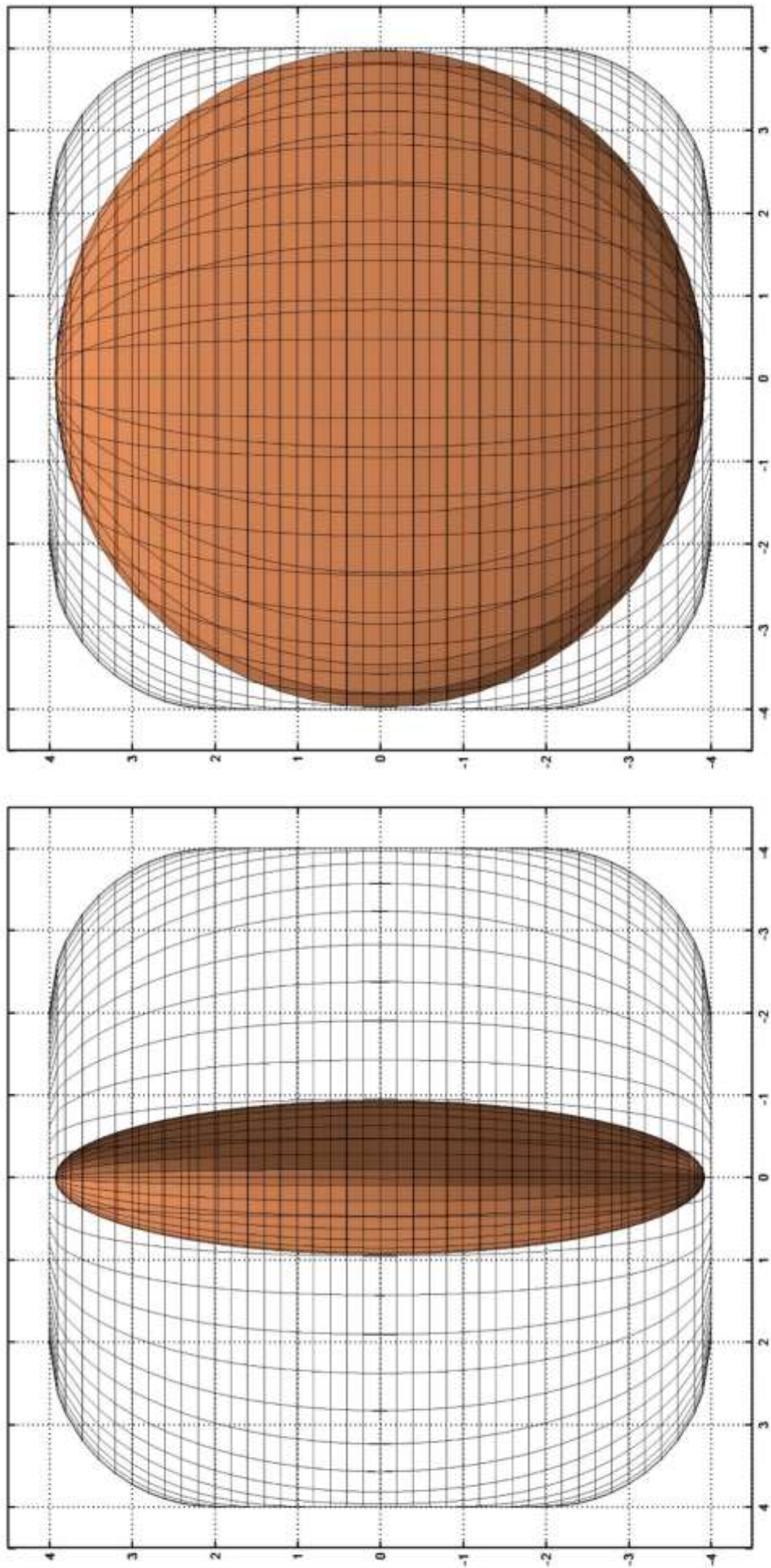


Рис. 6.27. Взаимное расположение поверхности S^0 ($n=6$) области H_C и области H_T .

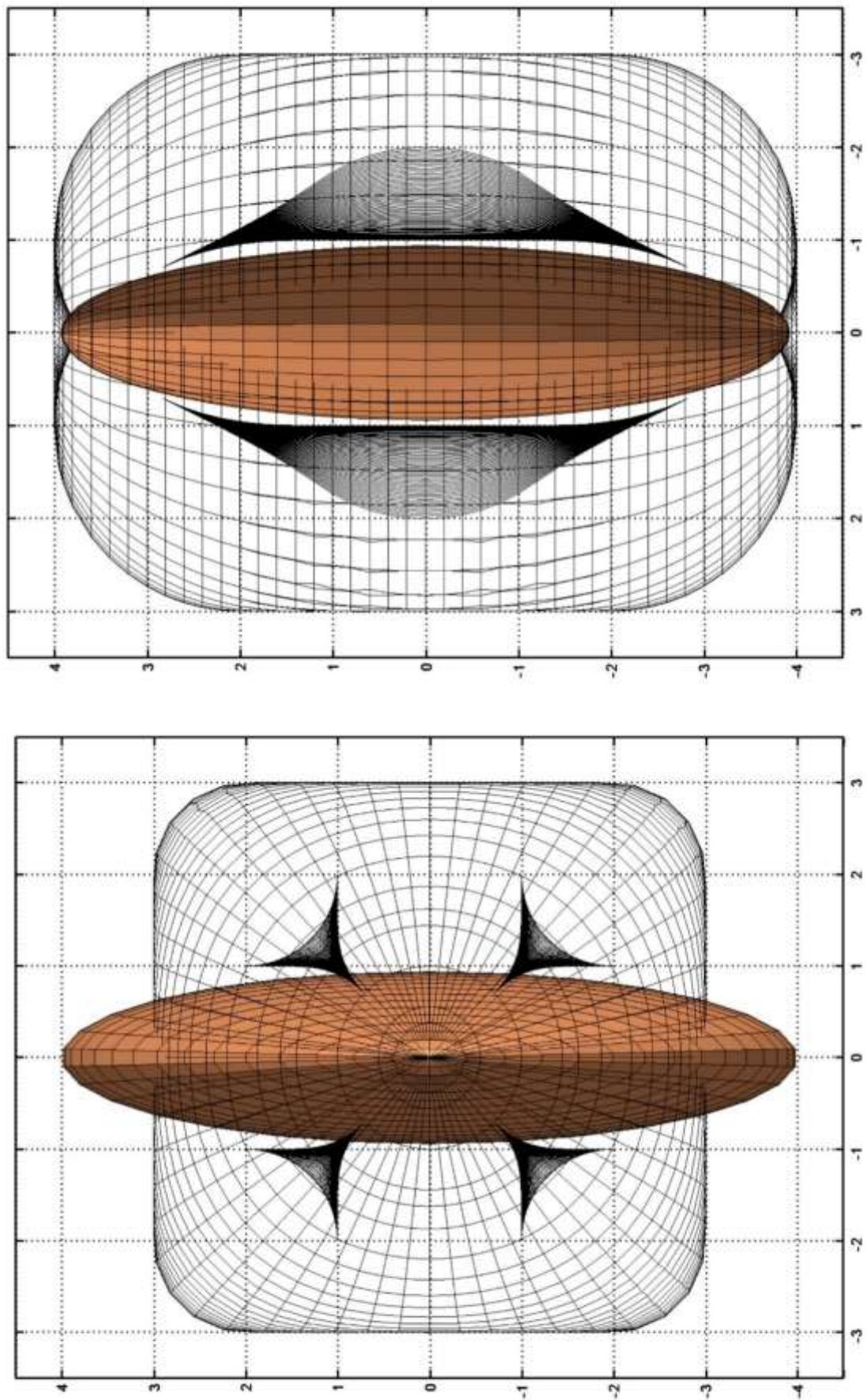


Рис. 6.28. Взаимное расположение поверхностей S^0 , S^* ($n=5$) области H_C и области H_T .

Заключение и выводы

В диссертационной работе изучена динамика управляемого углового движения КА, предназначенного для проведения длительных научных экспериментов. Наиболее благоприятные условия для проведения исследований на борту КА возникают при стабилизации режимов орбитальной или солнечной ориентации. В первом случае обеспечивается наиболее приемлемый уровень микроускорений, а во втором случае – наилучший энергопотребление с панелей СБ, необходимый для работы научной аппаратуры с большим потреблением электроэнергии.

Ключевым фактором в работе является именно длительность проведения эксперимента, т.е. продолжительность времени невозмущенного углового движения КА в заданном режиме стабилизации. Таким образом из процесса управления сразу исключается возможность использования ракетных и плазменных двигателей всех типов. Поэтому в работе рассматриваются только гироскопические и электромагнитные исполнительные органы системы управления.

Использование гироскопических органов управления (в частности двигателей-маховиков) тесно связано с проблемой разгрузки накопленного собственного кинетического момента. Опять же, длительность поддержания режима стабилизации КА здесь играет важную роль. Полученные в диссертации результаты позволяют обеспечить стабилизацию КА в орбитальной системе координат и в инерциальном пространстве с помощью гиросистемы сколь угодно долго без необходимости использования исполнительных органов других типов для проведения разгрузки.

В работе получены результаты, позволяющие использовать для стабилизации указанных выше режимов и электромагнитные исполнительные органы. Для их эффективного использования в работе предложена методика исследования устойчивости установившегося ориентированного движения КА, позволяющая выбирать используемые законы управления и их параметры.

Еще одним важным результатом работы является разработка методики оценки и прогнозирования минимального уровня микроускорений на борту КА в зависимости от параметров его орбиты, геометрических и массово-инерционных характеристик.

Также в работе получены практические результаты, представляющие собой методику выбора геометрических и физических параметров схем установки гироскопических органов управления (маховиков и гиродинов), используемых при осуществлении стабилизации рассматриваемых режимов ориентации КА. Эти результаты были использованы при разработке эскизных проектов и уже успешно запущенных и еще только проектируемых КА (см. Приложение).

В целом всю работу можно рассматривать в рамках единого подхода к исследованию управляемых режимов углового движения существующих или перспективных КА, предназначенных для проведения научных экспериментов в течение длительных интервалов времени и при наличии дополнительных функциональных ограничений. Но при этом каждая глава в отдельности представляет собой решение самостоятельной задачи, которое можно использовать при разработке систем управления угловым движением космических аппаратов различного назначения. Полученные в диссертации результаты позволяют значительно сократить время анализа и выбора параметров управления угловым движением КА на продолжительных интервалах времени. Также на основании представленных результатов можно:

- сделать выбор приборного состава системы управления КА, необходимого для реализации предложенных законов управления;
- выбрать места установки научной аппаратуры на борту КА;
- выбрать состав и схему установки гироскопических органов управления;
- оценить потребные характеристики магнитных органов управления.

Библиография

1. Петрукович А.А., Мулярчик Т.М., Васюков С.В., Веригин М.И., Котова Г.А., Стяжкин В.А. Первые советские космические эксперименты в 1957 – 1959 гг.: История и результаты // История наук о Земле. 2009. Т. 2, № 4. с. 5 – 24.
2. Бэлью Л., Стулингер Э. Орбитальная станция «Скайлэб». М.: Машиностроение, 1977. 232 с.
3. Седельников А.В. Проблема микроускорений: 30 лет поиска решений // Современные наукоемкие технологии. 2005. №4. с. 15-22.
4. Седельников А.В. Проблема микроускорений: от осознания до фрактальной модели. Избранные труды Российской школы по проблемам науки и технологий. М.: РАН, 2012. 277 с.
5. Сазонов В.В., Барбашова Т.Ф. Гравитационная ориентация искусственных спутников Земли. Москва: Курс, 2023. 144 с.
6. Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Сазонов В.В., Тянь Т.Н. Определение микроускорений на орбитальных комплексах «Салют-6» и «Салют-7» // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1984. №100. 28 с.
7. Хентов А.А. Влияние магнитного и гравитационного полей Земли на колебания спутника вокруг своего центра масс // Космические исследования. 1967. Т. 5, №4. с. 554-572.
8. Боевкин В.И., Гуревич Ю.Г., Павлов Ю.Н., Толстоусов Г.Н. Ориентация искусственных спутников в гравитационных и магнитных полях. Москва: Наука, 1976, 303 с.
9. Овчинников М.Ю. Периодические движения осесимметричного гравитационно-ориентированного спутника с демпфером // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1982. № 90. 24 с.
10. Овчинников М.Ю. Близкие к стационарным периодические движения осесимметричного спутника с магнитным демпфером // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1982. № 178. 24 с.

11. Сарычев В.А., Сазонов В.В., Овчинников М.Ю. Периодические колебания спутника относительно центра масс под действием магнитного момента // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1982. № 182. 24 с.
12. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли // Итоги науки и техники, Серия Исследование космического пространства, Т. 23. Москва: ВИНТИ, 1985. 103 с.
13. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Движение спутника с постоянным магнитом относительно центра масс // Космические исследования. 1986. Т. 24, № 4. с. 527–543.
14. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Магнитная ориентация спутника со сферическим демпфером // Космические исследования. 1986. Т. 24, № 6. с. 803-815.
15. Сазонов В.В. Одноосная магнитная ориентация искусственных спутников // Механика твердого тела. 1987. №3. с. 27-32.
16. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. Москва: Наука, 1985, 288 с.
17. Воронин А.А., Сазонов В.В. Периодические колебания относительно центра масс спутника-гиростата под действием магнитного и гравитационного моментов // Космические исследования. 1990. Т. 28, №1. с. 22-34.
18. Воронин А.А. О возможности трехосной магнитогироскопической ориентации искусственных спутников Земли // Механика твердого тела. 1997. №5. с. 3-14.
19. Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Ролдугин Д.С., Иванов Д.С. Магнитные системы ориентации малых спутников. Москва: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. 368 с.
20. Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические

- обзоры. 2023. Часть 1: Т. 220, с. 71-85, Часть 2: Т. 221, с. 71-92, Часть 3: Т. 222, с. 42-63, Часть 4: Т. 223, с. 84-106, Часть 5: Т. 224, с. 115-124.
21. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Исследование установившихся движений искусственного спутника Земли в режиме одноосной магнитной ориентации // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2019. №25. 44 с.
 22. Ignatov A.I., Sazonov V.V. Study of an artificial Earth's satellite stationary motions in the single-axis attitude magnetic orientation mode. AIP Conference Proceedings 2171, 130009 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5133276>.
 23. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Исследование установившихся движений искусственного спутника Земли в режиме одноосной магнитной ориентации. Космические исследования, 2021 г., том 59, №2, с. 135-148.
 24. Гришин С.Д., Дубовской В.Б., Лесков Л.В., Обыденников С.С. и др. Измерение малых ускорений на орбитальной научной станции «Салют-6» // Космические исследования. 1982. Т. 20, №3. с. 479-481.
 25. Гришин С.Д., Дубовский В.Б., Обыденников С.С., Савичев В.В. Исследование малых ускорений на борту орбитальной научной станции "Салют-6" // Технические эксперименты в невесомости. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1983. с. 6-14.
 26. Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Сазонов В.В., Тянь Т.Н. Определение движения орбитальных комплексов «Салют-6» и «Салют-7» относительно центра масс в режиме гравитационной ориентации по данным измерений // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1983. №88. 31 с.
 27. Беляев М.Ю., Зыков С.Г., Рябуха С.Б., Сазонов В.В., Сарычев В.А., Стажков В.М. Математическое моделирование и измерение микроускорений на орбитальной станции «МИР» // Известия Академии наук. Механика жидкости и газа. 1994. №5. с. 5 – 14.
 28. Сазонов В.В., Комаров М.М., Полежаев В.И. и др. Микроускорения на орбитальной станции «МИР» и оперативный анализ гравитационной чувствительности конвективных процессов тепломассопереноса // Космические исследования. 1999. Т. 37, №1. с. 86-101.

29. Земсков В.С., Раухман М.Р., Шалимов В.П. Гравитационная чувствительность растворов-расплавов при кристаллизации двухфазных сплавов InSb-InBi в космических условиях // Космические исследования. 2001. Т. 39, №4. с. 384-389.
30. Никитин С.А., Полежаев В.И., Сазонов В.В. О влиянии микроускорений на распределение примеси в расплаве полупроводника в космическом полете // Космические исследования. 2003. Т. 41, №5. с. 533-548.
31. Земсков В.С., Раухман М.Р., Шалимов В.П. и др. Влияние расположения ростовых установок на борту космического спутника на микрогравитационные условия проведения экспериментов (на примере БЗП InSb:Te на ИСЗ «Фотон-3») // Космические исследования. 2004. Т. 42, №2. с. 144-154.
32. Богуславский А.А., Сазонов В.В., Соколов С.М. и др. О влиянии микроускорений на распределение примеси в кристаллах InSb:Te, выращенные в орбитальном полете методом бестигельной зонной плавки // Космические исследования. 2004. Т. 42, №2. с. 155-161.
33. Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И. Казакова А.Е., Зайцев А.С. Анализ низкочастотных микроускорений на борту ИСЗ «Фотон-11» // Космические исследования. 2001. Т. 39, №4. с. 419-435.
34. Абрашкин В.И., Балакин В.Л., Белоконов И.В. и др. Неуправляемое вращательное движение спутника «Фотон-12» и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2003. Т. 41, №1. с. 45-56.
35. Абрашкин В.И., Волков М.В., Егоров А.В. Зайцев А.С., Казакова А.Е., Сазонов В.В. Анализ низкочастотной составляющей в измерениях угловой скорости и микроускорения, выполненных на спутнике «Фотон-12» // Космические исследования. 2003. Т. 41, №6. с. 632-651.
36. Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И. и др. Низкочастотные микроускорения на борту ИСЗ «Фотон-11» // Космические исследования. 2004. Т. 42, №2. с. 185-200.

37. Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е. и др. Неуправляемое движение спутника «Фотон М-2» и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2007. Т. 45, № 5. с. 450-470.
38. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Сазонов В.В. и др. Анализ низкочастотной составляющей в измерениях микроускорения, выполненных на спутнике «Фотон М-2» // Космические исследования. 2008. Т. 46, № 5. с. 463-483.
39. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Абрашкин В.И. и др. Определение неуправляемого движения спутника «Фотон М-3» по данным бортовых измерений магнитного поля Земли // Космические исследования. 2010. Т. 48, № 3. с. 246-259.
40. Латышев Л.А., Штырлин А.Ф., Непейвода О.М., Сазонов В.В. Использование электроракетных двигателей для реализации режима движения ИСЗ с малым уровнем микроускорений // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2007. №16. 26 с.
41. Завалишин Д.А., Беляев М.Ю., Сазонов В.В. Исследование вибрационных микроускорений на борту Международной Космической Станции // Космические исследования. 2013. Т. 51, № 4. с. 294-306.
42. Левтов В.Л., Романов В.В., Богуславский А.А., Сазонов В.В., Соколов С.М., Глотов Ю.Н. Определение квазистатических микроускорений на борту искусственного спутника по видеоизображению подвижных объектов // Космические исследования. 2009. Т. 47, № 6. с. 550-561.
43. Беляев М.Ю., Легостаев В.П., Матвеева Т.В., Монахов М.И., Рулев Д.Н., Сазонов В.В. Отработка методов проведения экспериментов в области микрогравитации в автономном полете грузового корабля «Прогресс М-20М» // Космическая техника и технологии. 2014. №3(6). с. 22-32.
44. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режимов вращательного движения ИСЗ с малым уровнем остаточных микроускорений электромеханическими исполнительными органами // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2008. №13. 32 с.

45. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Режимы вращательного движения ИСЗ с малым уровнем остаточных микроускорений // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. №4, ч. 5. с. 2195-2197.
46. Игнатов А.И. Использование двигателей-маховиков для реализации режима одноосной солнечной ориентации КА с малым уровнем микроускорений // Научно-технические разработки КБ «Салют» 2009 -2011 гг. (вып. 3). Москва: Машиностроение – Машиностроение-Полет. 2012. с. 176-192.
47. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режимов вращательного движения ИСЗ с малым уровнем микроускорений электромеханическими исполнительными органами // Космические исследования. 2012. Т. 50, № 5. с. 380-393.
48. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. Москва: Наука. 1974. 600 с.
49. Васильев В.Н. Системы ориентации космических аппаратов. Москва: ФГУП «НПП ВНИИЭМ». 2009. 310 с.
50. Vadali S.R., Oh H.-S. Space Station Attitude Control and Momentum Management: A Nonlinear Look // Guidance, Control and Dynamics. 1992. V. 15. № 3. p. 577–586.
51. Богачев А.В., Воробьева Е.А., Зубов Н.Е. и др. Разгрузка кинетического момента инерционных исполнительных органов космического аппарата в канале тангажа // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 3. с. 132–139.
52. Воробьева Е.А., Зубов Н.Е., Микрин Е.А. Безрасходная разгрузка накопленного кинетического момента инерционных исполнительных органов автономного космического аппарата на высокоэллиптической орбите // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 10.
53. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Стабилизация орбитальной ориентации космического аппарата с одновременной разгрузкой кинетического момента инерционных исполнительных органов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 4. с.

124 – 131.

54. Овчинников М.Ю., Ткачев С.С. Построение опорного углового движения для обеспечения разгрузки маховиков // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2010. №25. 31 с.
55. Сазонов В.В. Об одном механизме потери устойчивости режима гравитационной ориентации спутника // Космические исследования. 1989. Т. 27, №6. с. 836-841.
56. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Влияние аэродинамического момента на режим гравитационной ориентации орбитального комплекса «Салют-6 – Союз» // Космические исследования. 1985. Т. 23, №1. с. 63-67.
57. Сазонов В.В., Петров А.Л. О дестабилизирующем влиянии восстанавливающего аэродинамического момента на режим гравитационной ориентации вращающегося спутника // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1985. №1. 28 с.
58. Сазонов В.В., Петров А.Л. Эволюция режима гравитационной ориентации вращающегося спутника под действием непотенциального аэродинамического момента // Космические исследования. 1987. Т. 25, №4. с. 508-522.
59. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Влияние сопротивления атмосферы на одноосную гравитационную ориентацию вращающегося спутника // Космические исследования. 1982. Т. 20, №5. с. 659-673.
60. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Влияние сопротивления атмосферы на одноосную гравитационную ориентацию искусственного спутника // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1980. №152. 28 с.
61. Морозов В.М., Каленова В.И. Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации // Космические исследования. 2020. Т. 58, № 3. с. 199 – 207.
62. Stickler A.C., Alfriend K.T. Elementary magnetic attitude control system // Journal of Spacecraft and Rockets. 1976. V. 13, № 5. p. 282–287.
63. Яншин А.М. Торможение вращения проводящих оболочек геомагнитным

- полем // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1988. № 1. с. 170 – 176.
64. Мартыненко Ю.Г. Влияние вихревых токов на вращение и ориентацию спутника // Космические исследования. 1985. Т. 23, № 3. с. 347–357.
 65. Белецкий В.В., Грушевский А.В. Эволюция осевых вращений спутника под действием диссипативного магнитного момента // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1990. № 136. 22 с.
 66. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Оценка влияния диссипативного магнитного момента от вихревых токов на быстрое вращение спутника // Космические исследования. 1982. Т. 20, № 2. с. 297 – 300.
 67. Lovera M. Magnetic satellite detumbling: The b-dot algorithm revisited // Proceedings of the American Control Conference. Chicago, 2015. p. 1867 – 1872.
 68. Драновский В.И., Яншин А.М. Влияние диссипативных моментов от вихревых токов на ориентацию спутника, стабилизированного вращением // Космические исследования. 1975. Т. 13, № 4. с. 487–493.
 69. Сазонов В.В., Сарычев В.А. Влияние диссипативного магнитного момента на вращение спутника относительно центра масс // Известия АН СССР, Механика твердого тела. 1983. Т. 2. с. 3 – 12.
 70. Avanzini G., Giulietti F. Magnetic detumbling of a rigid spacecraft // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. V. 35, № 4. p. 1326–1334.
 71. Wisniewski R., Blanke M. Fully magnetic attitude control for spacecraft subject to gravity gradient // Automatica. 1999. V. 35, № 7. p. 1201–1214.
 72. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Одноосная электродинамическая стабилизация искусственного спутника Земли в орбитальной системе координат // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. с. 22-31.
 73. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Tkachev S.S., Penkov V.I. B-dot algorithm steady-state motion performance // Acta Astronautica. 2018. V. 146. p. 66 – 72.
 74. Roldugin D.S., Ovchinnikov M.Y., Ivanov D.S., Shachkov M.O., Koptev M.D., Pantsyrnyi O.A., Fedorov I.O. Saving mission yet to be launched: Tight schedule for an unexpected project // Advances in the Astronautical Sciences. 2018. V. 163.

P. 377–391.

75. Ovchinnikov M.Y., Ivanov D.S., Ivlev N.A., Karpenko S.O., Roldugin D.S., Tkachev S.S. Development, integrated investigation, laboratory and in-flight testing of «Chibis-M» microsatellite ADCS // *Acta Astronautica*. 2014. V. 93. p. 23 – 33.
76. Иванов Д.С., Ивлёв Н.А., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Ткачев С.С. Результаты летных испытаний системы ориентации микроспутника «Чиби́с-М» // *Космические исследования*. 2014. Т. 52, № 3. с. 218 – 228.
77. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Карпенко С.О., Пеньков В.И. Исследование быстродействия алгоритма активного магнитного демпфирования // *Космические исследования*. 2012. Т. 50, № 2. с. 176 – 183.
78. Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Ткачев С.С. Испытания алгоритмов управления ориентацией микроспутника «Чиби́с-М» на лабораторном стенде // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2012. № 1. с. 118 – 137.
79. Ролдугин Д.С. Динамика космических аппаратов с активной магнитной системой ориентации. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. Москва: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2023. 272 с.
80. Hajiyeve H., Guler D.C. Review on gyroless attitude determination methods for small satellites // *Progress in Aerospace Sciences*. 2017. V. 90. p. 54 – 66.
81. Martel F., Pal Parimal K., Psiaki Mark L. Three Axis Attitude Determination via Kalman Filtering of Magnetometer Data // *Proceedings of Flight Mechanics / Estimation Theory Symposium*. 1988. p. 345 – 367.
82. Psiaki Mark L. Three-Axis Attitude Determination via Kalman Filtering of Magnetometer Data // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1990. V. 13, №3. p. 506 – 514.
83. Abdelrahman M., Park S.-Y. Simultaneous spacecraft attitude and orbit estimation using magnetic field vector measurements // *Aerospace Science and*

Technology. 2011. V. 15, №8. p. 653 – 669.

84. Searcy J.D. Magnetometer-Only Attitude Determination Using Novel Two-Step Kalman Filter Approach // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. V. 35, №6. p. 1693 – 1701.
85. Иванов Д.С. Использование магнитных катушек и магнитометра для обеспечения трехосной ориентации спутника // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2015. №47. 20 с.
86. Ivanov D.S. Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties // Acta Astronautica. 2017. V.132. p. 103 – 110.
87. Ivanov D.S. Attitude motion and sensor bias estimation onboard the «SiriusSat-1» nanosatellite using magnetometer only // Acta Astronautica. 2021. V.188. p. 295 – 307.
88. Крамлих А.В., Николаев П.Н., Рылько Д.В. Бортовой двухэтапный алгоритм определения ориентации наноспутника «SAMSAT-ION» // Гироскопия и навигация. 2023. Т.31, №2 (121). с. 65 – 85.
89. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режима орбитальной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. №1. с. 129-142.
90. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима гравитационной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. №28. 2016. 32 с.
91. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима орбитальной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. №2. 2018. 30 с.
92. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима гравитационной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления // Космические исследования. 2020. Т. 58, №1. с. 40-48.
93. Маштаков Я.В., Ткачев С.С. Построение опорного углового движения для

- обеспечения разгрузки маховиков // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2017. №78. 32 с.
94. Mashtakov Y., Tkachev S., Ovchinnikov M. Use of External Torques for Desaturation of Reaction Wheels // *Guidance, Control and Dynamics*. 2018. V. 41. № 8. p. 1663–1674.
 95. Карпенко С.О. Исследование движения спутника с активной магнитной системой ориентации по информации от солнечного датчика. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2021. 120 с.
 96. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Tkachev S.S., Karpenko S.O. New one-axis one-sensor magnetic attitude control theoretical and in-flight performance // *Acta Astronautica*. 2014. V. 105, № 1. p. 12–16.
 97. Karpenko S.O., Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Tkachev S.S. One-axis attitude of arbitrary satellite using magnetorquers only // *Cosmic Research*. 2013. V. 51, № 6. p. 478 – 484.
 98. Ролдугин Д.С. Моделирование сценариев однозначной магнитной стабилизации космического аппарата на Солнце по данным солнечных датчиков // *Математическое моделирование*. 2023. Т. 35, № 3. с. 20 – 34.
 99. Roldugin D., Tkachev S., Ovchinnikov M. Asymptotic Motion of a Satellite under the Action of Sdot Magnetic Attitude Control // *Aerospace*. 2022. V. 9, № 11. Paper 639.
 100. Roldugin D.S., Tkachev S.S., Ovchinnikov M.Y. Satellite angular motion under the action of Sdot magnetic one axis sun acquisition algorithm // *Cosmic Research*. 2021. V. 59, № 6. p. 529 – 536.
 101. Воронин А.А., Сазонов В.В. Периодические колебания спутника-гиростата с большим собственным кинетическим моментом // *Известия академии наук СССР. Механика твердого тела*. 1989. №1. с. 3 – 12.
 102. Троицкая А.В., Сазонов В.В. Периодические движения спутника-гиростата с большим гиростатическим моментом относительно центра масс // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2014. №12. 18 с.

103. Сазонов В.В., Троицкая А.В., Периодические движения спутника-гиростата с большим гиросtatическим моментом относительно центра масс // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79, №5. с. 595 – 607.
104. Троицкая А.В., Сазонов В.В. О периодических движениях спутника-гиростата с большим гиросtatическим моментом // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2016. №8. 19 с.
105. Сазонов В.В., Троицкая А.В. О периодических движениях спутника-гиростата с большим гиросtatическим моментом // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, №4. с. 432 – 444.
106. Сазонов В.В., Троицкая А.В. Периодические решения дифференциального уравнения второго порядка с большим параметром // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, №5. с. 622 – 630.
107. Троицкая А.В. Периодические колебания механических систем, уравнения движения которых содержат большой параметр. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Москва: МГУ им. М.В. Ломоносова. Механико-математический факультет. 2019. 88 с.
108. Flatto L., Levinson N. Periodic solutions of singularly perturbed systems // Journal of Rational Mechanics and Analysis. 1955. V. 4. p. 943 – 950.
109. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Мир. 1986. 463 с.
110. Vazov V. Singular perturbations of boundary value problems for nonlinear differential equations of the second order // Comm. Pure Appl. Math. 1956. V. 9. p. 93 – 113.
111. Аносов Д.В. О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // Математический сборник. 1960. Т. 50 (92), №. 3. с. 299 – 334.
112. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Оценка остаточных микроускорений на борту ИСЗ в режиме одноосной солнечной ориентации // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2009. №65. 36 с.
113. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Оценка остаточных микроускорений на борту

- ИСЗ в режиме одноосной солнечной ориентации // Космические исследования. 2013. Т. 51, № 5. с. 380 – 388.
114. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима солнечной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2017. №80. 31 с.
 115. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима солнечной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления // Космические исследования. 2018. Т. 58, №5. с. 375 – 383.
 116. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режима солнечной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2019. №99. 27 с.
 117. Игнатов А.И. Стабилизация режима солнечной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. №3, с. 164 – 176.
 118. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Оценка уровня квазистатических микроускорений на борту искусственного спутника Земли в режиме солнечной ориентации // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2020. №54. 28 с.
 119. Игнатов А.И. Оценка низкочастотных микроускорений на борту искусственного спутника Земли в режиме солнечной ориентации // Космические исследования. 2022. Т. 60, №1. с. 43 – 56.
 120. Markley F.L., Reynolds R.G., Liu F.X. Maximum torque and momentum envelopes for reaction-wheel arrays // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2010. V. 33. №.5. p. 1606-1614.
 121. Ткачев С.С. Исследование управляемого углового движения аппаратов с ротирующими элементами. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Москва: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2011. 109 с.
 122. Беленький А.Д., Васильев В.Н. Управление минимально избыточной

- системой электродвигателей-маховиков // Известия РАН. Механика твердого тела. 1996. №2. с. 75 – 81.
123. Беленький А.Д., Васильев В.Н., Семенов А.С., Семенов М.Е. Алгоритм управления системой четырех двигателей-маховиков космических аппаратов серии «Метеор-М» №2 // Вопросы электромеханики. 2013. Т. 134. с. 9 – 14.
 124. Карпачев Ю. А., Павловский М. А. Управление ориентацией космических аппаратов с произвольно-избыточной структурой одноосных электромаховичных двигателей // Космические исследования. 1987. Т. 25, №4. с. 530 – 536.
 125. Hyungjoo Y., Hyun H.S., Hong-Taek C. Optimal uses of reaction wheels in the pyramid configuration using a new minimum infinity-norm solution // Aerospace Science and Technology. 2014. V. 39. p. 109 – 119.
 126. Лебедев Д.В. Разгрузка кинетического момента избыточной системы маховиков космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. №4. с. 118 – 124.
 127. Сорокин А.В., Башкеев Н.И., Яременко В.В. и др. Гиросиловая система ориентации космического аппарата «Ресурс-ДК» // Труды IX Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам. С.-Петербург: ЦНИИ «Электроприбор». 2002. с. 268 – 274.
 128. Токарь Е.Н. Проблемы управления гиросиловыми стабилизаторами // Космические исследования. 1978. Т. 16, №2. с. 179 – 187.
 129. Токарь Е.Н., Платонов В.Н. Исследование особых поверхностей систем безупорных гиросиловых стабилизаторов // Космические исследования. 1978. Т. 16, №5. с. 675 – 685.
 130. Токарь Е.Н., Легостаев В.П., Платонов В.Н., Седых Д.А. Кратные гиросиловые системы // Космические исследования. 1981. Т. 19, №6. с. 813 – 822.
 131. Сомов Е.И., Бутырин С.А., Платонов В.Н., Сорокин А.В. Управление

- силовыми гироскопическими комплексами космических аппаратов // Труды X Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам. С.-Петербург: ЦНИИ «Электроприбор». 2003. с. 278 – 294.
132. Платонов В.Н. Управление ориентацией космических аппаратов с использованием гироскопов. Королёв: РКК «Энергия». 2021. 132 с.
 133. Амелькин Н.И. Стационарные движения твердого тела, несущего силовые гироскопы, и их устойчивость. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. Москва: ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН. 2011. 250 с.
 134. Платонов В.Н., Сумароков А.В. Управление космическим аппаратом с помощью двухстепенных гироскопов при их раскрутке и торможении // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. №2. с. 156 – 167.
 135. Leve F.A., Hamilton B.J., Peck M.A. Spacecraft momentum control systems. Space Technology Library. Springer international publishing. 2015. p. 250.
 136. Margulies G., Aubrun J. Geometric theory of single-gimbal control moment gyro system // J. Astronaut Sci. 1978. V. 27 (2). p. 159 – 191.
 137. Балабан И.Ю., Комаров М.М., Сазонов В.В. Решение систем нелинейных уравнений методом продолжения по параметру // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 1997. №3. 18 с.
 138. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. Москва: Едиториал УРСС. 1999. 222 с.
 139. Игнатов А.И., Давыдов А.А., Сазонов В.В. Анализ динамических возможностей систем управления малым космическим аппаратом, построенных на базе двигателей-маховиков // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2005. №47. 28 с.
 140. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Построение и анализ особых поверхностей систем безупорных гироскопов методом продолжения по параметру // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2007. №27. 28 с.

141. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Исследование особых поверхностей систем безупорных гироскопов методом продолжения по параметру // Космические исследования. 2009. Т. 47, №4. с. 355 – 362.
142. Игнатов А.И. Выбор геометрических параметров расположения системы двигателей-маховиков при управлении вращательным движением космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022. №1. с. 124 – 144.
143. Игнатов А.И., Иванов Г.А., Коломиец Е.С., Мартыненко Е.В. Реализация режима солнечной ориентации космического аппарата с помощью системы двигателей-маховиков // Космические исследования. 2023. Т. 61, №2. с. 143 – 156.
144. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2023681348. Программа расчета и визуализации сингулярных состояний силовых гироскопических комплексов (гироскопов) / А.И. Игнатов, Е.В. Мартыненко. Заявка №2023680642. Дата поступления 02.10.2023. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 12.10.2023.
145. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. Москва: Наука. 1970. 240 с.
146. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Москва: Едиториал УРСС. 2017. 432 с.
147. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. Москва: ЛЕНАНД. 2019. 504 с.
148. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. Москва: Наука. 1972. 720 с.
149. Тербиж В.Ю. Анализ временных рядов в астрофизике. Москва: Наука. 1992. 392 с.
150. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. Москва: Мир. 1985. 503 с.
151. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2024616504. Программно-математический комплекс для моделирования

управляемого углового движения космических аппаратов / А.И. Игнатов. Заявка №2024615271. Дата поступления 14.03.2024. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 21.03.2024.

152. Alken P. et al. International Geomagnetic Reference Field: the thirteenth generation // *Earth, Planets and Space*. 2021. V. 73, №1. p. 49.
153. Бажинов И.К., Гаврилов В.П., Ястребов В.Д. и др. Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют-6» - «Союз» - «Прогресс». Москва: Наука. 1985. 376 с.
154. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. Москва: Наука. 1965. 416 с.
155. Белецкий В.В. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наукова думка. 1984. 187 с.
156. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. Москва: Машиностроение. 1975. 248 с.
157. Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Сазонов В.В., Тянь Т.Н. Определение микроускорений на орбитальных комплексах «Салют-6» и «Салют-7» // *Космические исследования*. 1986. Т. 24, №3. с. 337 – 344.
158. Брюханов Н.А., Цветков В.В., Беляев М.Ю. и др. Экспериментальное исследование режимов неуправляемого вращательного движения ИСЗ «Прогресс» // *Космические исследования*. 2006. Т. 44, №1. с. 52 – 61.
159. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // *Итоги науки и техники. Исследование космического пространства*. Москва: ВИНТИ. 1978. Т. 11. 221 с.
160. Сазонов В.В. Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром // *Прикладная математика и механика*. 1983. Т. 47, №5. с. 707 – 719.
161. Markley F.L. Attitude determination using vector observation and singular value decomposition // *The Journal of the Astronautical Sciences*. 1988. V. 36, №3. p. 245 – 258.
162. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников.

- Москва: Ижевск. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2010. 156 с.
163. Гутник С.А. Динамика движения спутника относительно центра масс с пассивными системами ориентации. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. Москва: Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет). 2019. 280 с.
 164. Сазонов В.В. Гравитационная ориентация искусственных спутников с гиродинами // Космические исследования. 1988. Т. 26, №2. с. 315 – 318.
 165. Сарычев В.А. Условия устойчивости системы гравитационной стабилизации спутников с гиродемпфированием // Astronautica Acta. 1969. V. 14, №4. p. 299 – 301.
 166. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Москва: Физматгиз. 1959. 211 с.
 167. Абрашкин В.И., Пузин Ю.А., Сазонов В.В. Электромагнитная система управления вращательным движением спутника, обеспечивающая малый уровень микроускорений на его борту // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2010. №22. 22 с.
 168. Меес Ж. Астрономические формулы для калькуляторов. Москва: Мир. 1988. 168 с.
 169. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: Наука. 1988. 581 с.
 170. Yoon H., Seo H.H., Park Y.-W., Choi H.-T. A New Minimum Infinity-norm Solution: with Application to Capacity of Spacecraft Reaction Wheels // American Control Conf. (ACC). Chicago, IL. 2015. p. 1241 – 1245.
 171. Yoon H., Seo H.H., Choi H.-T. Optimal Uses of Reaction Wheels in the Pyramid Configuration Using a New Minimum Infinity-norm Solution // Aerospace Science and Technology. 2014. V. 39. p. 109 – 119.
 172. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. Москва: Мир. 1980. 459 с.



Госкорпорация «Роскосмос»
Акционерное общество
**«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОСМИЧЕСКИЙ
НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ ЦЕНТР имени М.В. ХРУНИЧЕВА»**
(АО «ГКНПЦ им. М.В. Хруничева»)

Новозаводская ул., д. 18, г. Москва, 121309, тел.: 8 (499) 749 99 34, факс: 8 (499) 749 51 24
Тел.: 8 (499) 749 83 43, факс: 8 (499) 142 59 00, e-mail: agd@khrunichev.ru, <http://www.khrunichev.ru>
ОГРН 5177746220361, ИНН/КПП 7730239877/773001001

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы А.И. Игнатова
«Динамика и управление угловым движением космического аппарата,
предназначенного для проведения длительных научных экспериментов»

Настоящий акт составлен о том, что результаты, полученные Игнатовым Александром Ивановичем в его диссертационной работе на соискание ученой степени доктора технических наук на тему «Динамика и управление угловым движением космического аппарата, предназначенного для проведения длительных научных экспериментов», обладают практической значимостью и могут быть использованы при разработке ракетно-космической техники (космические аппараты и разгонные блоки). Некоторые из полученных А.И. Игнатовым в его диссертационной работе результатов были внедрены в КБ «Салют» АО «ГКНПЦ им. М.В. Хруничева» и использовались при выпуске материалов эскизных проектов и конструкторской документации на изделия РКТ, что позволило разработать математические модели углового движения КА (РБ), провести анализ и выбрать оптимальные параметры объектов управления, сократить сроки выполнения работ.

Первый заместитель генерального конструктора КБ «Салют»
д.т.н., профессор



А.В. Владимиров

Ученый секретарь НТС КБ «Салют», к.т.н.

А.А. Белкин



Исх. № 20112024-3

От * 20 * ноября 2024 г.

О внедрении результатов диссертационной работы

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы А.И. Игнатова
«Динамика и управление угловым движением космического аппарата, предназначенного
для проведения длительных научных экспериментов»

Настоящий акт составлен о том, что результаты, полученные Игнатовым Александром Ивановичем в его диссертационной работе на соискание ученой степени доктора технических наук на тему «Динамика и управление угловым движением космического аппарата, предназначенного для проведения длительных научных экспериментов», обладают практической значимостью и могут быть использованы при разработке космических аппаратов. Несколько из полученных А.И. Игнатовым в его диссертационной работе результатов были внедрены в ООО «СПУТНИК» при разработке эскизных проектов создаваемых изделий, что позволило сократить срок выполнения работ.

Генеральный директор
ООО «СПУТНИК»

Иваненко В.В.



Исп. Копик А.Г.
+7 903 110 81 29

Копия



Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный
технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
тел. +7 (499) 263-63-91, факс +7 (499) 267-48-44
bmstu.ru bauman@bmstu.ru

ОГРН 1027739051779
ИНН 7701002520 КПП 770101001

На № _____ от _____
№ _____

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы в учебный процесс

С 2023/24 учебного года на кафедре ФНЗ «Теоретическая механика» имени профессора Н.Е. Жуковского в учебный процесс внедрена «Программа расчета и визуализации сингулярных состояний силовых гироскопических комплексов (гиродинов)», разработанная под научным руководством доцента кафедры ФНЗ Игнатова Александра Ивановича (совместно со студенткой кафедры СМ1 Мартыненко Екатериной Вадимовной) на основе результатов его докторской диссертационной работы на тему «Динамика и управление угловым движением космического аппарата, предназначенного для проведения длительных научных экспериментов».

Указанная программа используется для подготовки студентов кафедры ФНЗ в рамках дисциплины «Математическое моделирование систем гироскопических и электромагнитных органов управления угловым движением космических аппаратов» по направлению подготовки 01.03.03 «Механика и математическое моделирование», профиль 01.03.03/01 «Математическое и компьютерное моделирование динамических систем и процессов».

В 2023 году на программу получено Свидетельство о государственной регистрации программы №2023681348 от 12 октября 2023 года.

Руководитель НУК ФН



Гладышев В.О.

Заведующий кафедрой ФНЗ

Шкапов П.М.



Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный
технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
тел. +7 (499) 263-63-91, факс +7 (499) 267-48-44
bmstu.ru bauman@bmstu.ru

ОГРН 1027739051779
ИНН 7701002520 КПП 770101001

№ _____
На № _____ от _____

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы в учебный процесс

С 2023/24 учебного года на кафедре ФНЗ «Теоретическая механика» имени профессора Н.Е. Жуковского в учебный процесс внедрен «Программно-математический комплекс для моделирования управляемого углового движения космических аппаратов», разработанный доцентом кафедры ФНЗ Игнатовым Александром Ивановичем на основе результатов его докторской диссертационной работы на тему «Динамика и управление угловым движением космического аппарата, предназначенного для проведения длительных научных экспериментов».

Указанный программно-математический комплекс (ПМК) используется для подготовки студентов кафедры ФНЗ в рамках дисциплины «Движение искусственных спутников Земли относительно центра масс» по направлению подготовки 01.03.03 «Механика и математическое моделирование», профиль 01.03.03/01 «Математическое и компьютерное моделирование динамических систем и процессов». Также, ПМК применяется при выполнении научно-исследовательских работ студентов (НИРС) проводимых на кафедре ФНЗ.

В 2024 году на данную программу получено Свидетельство о государственной регистрации программы №2024616504 от 21 марта 2024 года.

Руководитель НУК ФН

Гладышев В.О.

Заведующий кафедрой ФНЗ

Шкапов П.М.



Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный
технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
тел. +7 (499) 263-63-91, факс +7 (499) 267-48-44
bmstu.ru bauman@bmstu.ru

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель НУК ИУ МГТУ им. Баумана

доктор технических наук, профессор

А.В. Пролетарский

2024 г.



АКТ

внедрения результатов диссертационной работы

«Динамика и управление угловым движением космического аппарата,
предназначенного для проведения длительных научных экспериментов»

Игнатова Александра Ивановича

Настоящий акт подтверждает внедрение научных результатов, полученных в диссертационной работе Игнатова А.И., а именно «Программа расчета и визуализации сингулярных состояний силовых гироскопических комплексов (гиродинов)».

С 2023/24 учебного года на кафедре ИУ-2 «Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации», в рамках развития цифровой образовательной среды, в учебный процесс внедрена компьютерная программа, разработанная под научным руководством доцента кафедры ИУ-2 (по совместительству ФН-3) Игнатова Александра Ивановича на основе результатов его докторской диссертационной работы на тему «Динамика и управление угловым движением космического аппарата, предназначенного для проведения длительных научных экспериментов».

В 2023 году на программу получено Свидетельство о государственной регистрации программы №2023681348 от 12 октября 2023 года.

Указанная программа используется для обучения студентов кафедры ИУ-2 в рамках специальной дисциплины учебного плана «Электромеханические исполнительные органы систем управления КА». Также программа может применяться при выполнении научно-исследовательских работ студентов (НИРС), а так же при выполнении ими курсового и дипломного проектирования проводимых на кафедре ИУ-2.

Заведующий кафедрой ИУ-2, доктор
технических наук, доцент

Шаповалов А.Б.



Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный
технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
тел. +7 (499) 263-63-91, факс +7 (499) 267-48-44
bmstu.ru bauman@bmstu.ru

ОГРН 1027739051779
ИНН 7701002520 КПП 770101001

На № _____ № _____
от _____

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы
в учебный процесс

С 2024/25 учебного года на кафедре ФНЗ «Теоретическая механика» имени профессора Н.Е. Жуковского в учебный процесс внедрена дисциплина «Математическое моделирование систем гироскопических и электромагнитных органов управления угловым движением космических аппаратов», полностью разработанная на основе научных положений, выводов и рекомендаций докторской диссертационной работы доцента кафедры ФНЗ Игнатова Александра Ивановича на тему «Динамика и управление угловым движением космического аппарата, предназначенного для проведения длительных научных экспериментов». Конкретно в содержание дисциплины вошли следующие теоретические и практические результаты, полученные А.И. Игнатовым:

- теоретические основы и обоснование методики численного параметрического исследования установившегося ориентированного движения КА, центр масс которого движется по околоземной орбите;
- общие принципы разработки новых законов управления угловым движением КА в течение длительных интервалов времени и при наличии функциональных ограничений;
- обоснование методологии выбора параметров схем расположения и характеристик гироскопических органов системы управления КА, обеспечивающих реализацию предложенных законов управления различными режимами углового движения КА

Дисциплина читается студентам кафедры ФНЗ «Теоретическая механика» имени профессора Н.Е. Жуковского по направлению подготовки 01.03.03 «Механика и математическое моделирование» по профилю 01.03.03/01 «Математическое и компьютерное моделирование динамических систем и процессов». На 2025/26 учебный год, по результатам, полученным Игнатовым А.И. в его диссертационной работе, запланировано издание учебного пособия по указанной выше дисциплине.

Руководитель НУК ФН

Гладышев В.О.

Заведующий кафедрой ФНЗ

Шкапов П.М.